

FRIEDRICH-ALEXANDER-UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG  
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT I  
LEHRSTUHL FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK

Anwendung der  
Multiple Space-Time Scale Analysis  
auf ein System  $\mathbb{R}$ -wertiger,  
hierarchisch interagierender,  
stochastischer Differentialgleichungen.

Diplomarbeit  
von Frank Schiller

Betreuer: Prof. Dr. A. Greven

Erlangen, den 17.07.1997  
Überarbeitet im Januar 1998

## Zusammenfassung

Um das Langzeitverhalten hierarchisch interagierender Systeme stochastischer Differentialgleichungen zu verstehen, wurde die *Multiple Space-Time Scale Analysis* entwickelt, mit der es möglich ist das Grenzverhalten dieser Systeme entkoppelt in großen Raum- und Zeitskalen zu betrachten und somit Rückschlüsse auf das ursprüngliche System zu ziehen. Da das Grenzverhalten nunmehr durch eine Markov-Kette – die *Wechselwirkungskette* des Systems – beschrieben wird, gegen die das renormalisierte System bei geeigneter Wahl der Skalen in Verteilung konvergiert, vereinfacht sich die Betrachtung des Systems: der Zustandsraum der Markov-Kette entspricht dabei dem eines „Teilchens“ des Systems, die Zeitvariable durchläuft dagegen nicht mehr  $\mathbb{R}_+$  sondern nur noch je nach Definition der Zeitskala  $\mathbb{Z}_-$  bzw.  $\mathbb{Z}_+$ .

Bisher wurden Systeme betrachtet, deren „Teilchen“ Werte in  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{R}_+$  annehmen. In dieser Arbeit soll nun die Markov-Kette untersucht werden, die von Systemen auf  $\mathbb{R}$  erzeugt wird.

Als Schwerpunkt befasst sich die Arbeit mit den Eigenschaften der Wechselwirkungskette und den daraus resultierenden des zugrundeliegenden Systems. Es zeigt sich, dass das Langzeitverhalten des Systems hierarchisch interagierender Diffusionen – Stabilität oder Clusterbildung – nur von der Stärke der Interaktion zwischen den einzelnen Hierarchien abhängt. In einem weiteren Schritt untersuchen wir die typische Größe und Höhe dieser Cluster im Fall der Clusterbildung. Die Ergebnisse werden jeweils mit denen der Systeme mit Diffusionen auf  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{R}_+$  verglichen.

Die Übergangskerne der Wechselwirkungskette ergeben sich als Gleichgewichtsmaße einer Folge stochastischer Differentialgleichungen, deren Eigenschaften wir zunächst untersuchen. Bei der Erzeugung der Folge spielt eine nichtlineare Abbildung eines Unterraums der stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  in sich eine wichtige Rolle, deren Wohldefiniertheit wir zeigen werden. In einem eigenen Kapitel wollen wir außerdem die wesentlichen Eigenschaften dieser Abbildung zusammenfassen und mit Hilfe eines Computerprogramms visualisieren.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Bezeichnungen</b>	<b>2</b>
<b>1 Einleitung und Überblick</b>	<b>3</b>
1.1 Das Modell	4
1.2 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Hintergrund	6
1.3 Ergebnisse	8
1.3.1 Grundlegende Eigenschaften der Markov-Kette	9
1.3.2 Verhalten der Markov-Kette für $j \rightarrow \infty$	9
1.3.3 Genauere Analyse der Clusterbildung	10
<b>2 Eigenschaften der stoch. Differentialgleichung</b>	<b>16</b>
2.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen	16
2.2 Invariante Maße des Prozesses	17
2.2.1 Definitionen und Sätze	17
2.2.2 Beweis der Existenz	19
2.2.3 Beweis der Eindeutigkeit	24
2.2.4 Momente der Gleichgewichtsverteilung	26
<b>3 Eigenschaften der Markov-Kette</b>	<b>28</b>
3.1 Wohldefiniertheit	28
3.2 Grundlegende Eigenschaften der Markov-Kette	33
3.2.1 Das erste und zweite Moment	33
3.2.2 Martingaleigenschaft der Markov-Kette	34
3.3 Verhalten der Markov-Kette für $j \rightarrow \infty$	34
3.3.1 Entrance Law	34
3.3.2 Divergenz	35
3.4 Diffusives Clustern	36
3.4.1 Beweis des Theorems	36
3.4.2 Beweis der Korollare	39
3.5 Macro-Clustern	41
<b>4 Theorie und Simulation der Iteration</b>	<b>43</b>
4.1 Glättende Eigenschaft des Operators $F$	43
4.2 Fixpunkte und Fixformen	43
4.3 Konvergenzverhalten an Beispielen	45
4.3.1 Gleichmäßige Konvergenz gegen Fixpunkt	45
4.3.2 Beschränkte Grenzfunktion	47
4.3.3 Konvergenz nach Reskalierung der Funktionenfolge	47
<b>5 Ausblick</b>	<b>50</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>51</b>

# Bezeichnungen

Zu Beginn der Arbeit seien kurz die verwendeten Bezeichnungen und Notationen in alphabetischer Reihenfolge zusammengefasst. Außerdem finden sich hier Verweise auf Definitionen, die in dieser Arbeit gemacht werden.

$\lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$	Gaußklammer von $x$ ; die größte Zahl $q \in \mathbb{Z}$ mit $q \leq x$
$x \vee y, x, y \in \mathbb{R}$	$\max\{x, y\}$
$x \wedge y, x, y \in \mathbb{R}$	$\min\{x, y\}$
$X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y$	$X_n$ konvergiert fast sicher gegen $Y$
$X_n \xrightarrow{L^d} Y, d \geq 1$	$X_n$ konvergiert in $L^d$ gegen $Y$
$X_n \xrightarrow{p} Y$	$X_n$ konvergiert stochastisch gegen $Y$
$\mathcal{L}[X_n] \implies \mathcal{L}[Y]$	$X_n$ konvergiert schwach in Verteilung gegen $Y$
$\mathbf{1}_A$	Indikatorfunktion der Menge $A$
$\mathfrak{B}$	von $\mathbb{R}$ erzeugte Borelsche $\sigma$ -Algebra
$\overline{\mathfrak{B}}$	von $\overline{\mathbb{R}}$ erzeugte Borelsche $\sigma$ -Algebra
$C$	Menge der stetigen Funktionen
$C^k, k \in \mathbb{N} \cup \infty$	Menge der $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C_b$	Menge der beschränkten, stetigen Funktionen
$C_c$	Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger
$\text{card}(A)$	Mächtigkeit der Menge $A$
$\delta_x$	Wahrscheinlichkeitsmaß mit Punktmasse in $x$
$\mathbf{E}[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariable $X$
$\mathbf{E}_x[X(t)]$	bedingte Erwartung $\mathbf{E}[X(t) \mid X(0) = x]$
$\mathbf{E}^\mu[X(t)]$	Erwartungswert des Prozesses $(X(t))_{t \geq 0}$ zur Zeit $t$ mit Startverteilung $\mathcal{L}[X(0)] = \mu$
$F_c$	nichtlinearer Operator auf $\mathfrak{G}$ , vgl. Definition 1.2
$F^n, n \in \mathbb{Z}_+$	Verknüpfung der Operatoren $F_{c_n} \circ \dots \circ F_{c_0}$
$\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_*$	Menge von Funktionen, vgl. Definition 1.1
$\text{id}_A$	identische Abbildung auf der Menge $A$
$\mathcal{L}[X]$	Verteilung der Zufallsvariablen $X$
$\mathfrak{M}_a, a \geq 0$	Menge aller Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Gesamtmasse $a$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^\times$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_-$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbf{Var}[X]$	Varianz der Zufallsvariablen $X$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
$\mathbb{Z}_+$	$\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}_-$	$\{0, -1, -2, \dots\}$

# Kapitel 1

## Einleitung und Überblick

In einer Reihe von Arbeiten von Dawson und Greven ([DG1, DG2, DG3]) wurden Modelle aus der mathematischen Biologie betrachtet, in denen hierarchisch gekoppelte stochastische Differentialgleichungen mit abzählbar unendlich vielen Komponenten von Bedeutung sind. Um das Langzeitverhalten dieser Systeme zu verstehen, wurde ein Verfahren entwickelt – die *Multiple Space-Time Scale Analysis* –, mit dem es möglich ist das Grenzverhalten dieser Systeme entkoppelt in großen Raum- und Zeitskalen zu betrachten und somit Rückschlüsse auf das ursprüngliche System zu ziehen. Eine besondere Bedeutung spielt dabei eine Markov-Kette, die *Wechselwirkungskette* des Systems, gegen die das renormalisierte System bei geeigneter Wahl der Skalen in Verteilung konvergiert und die die Raum-Zeit-Abhängigkeit des Systems beschreibt.

Bisher wurden Systeme betrachtet, deren Komponenten oder „Teilchen“ Werte in  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{R}_+$  annehmen. Insbesondere wurden damit Systeme hierarchisch interagierender Fisher-Wright-Diffusionen bzw. Feller-Verzweigungsprozesse als Spezialfälle behandelt. In dieser Arbeit soll nun die Markov-Kette untersucht werden, die von Systemen auf  $\mathbb{R}$  und als Spezialfall des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses erzeugt wird. Die Grundlagen, auf die diese Arbeit aufbaut (siehe Abschnitt 1.2 für einen Überblick), werden in der Diplomarbeit von Sauter behandelt (vgl. [Sau]).

Ausgehend von dieser Arbeit untersuchen wir die Eigenschaften der der Wechselwirkungskette zugrundeliegenden stochastischen Differentialgleichungen und deren Gleichgewichtsmaße, die als zeitinhomogene Übergangskerne der Wechselwirkungskette dienen. Dabei spielt eine nichtlineare Abbildung eines Unterrums der stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  in sich eine wichtige Rolle, deren Wohldefiniertheit wir zeigen werden. In einem eigenen Kapitel wollen wir außerdem die wesentlichen Eigenschaften dieser Abbildung zusammenfassen und mit Hilfe eines Computerprogramms visualisieren. Für eine exakte Analyse der in den Fällen von Systemen auf  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{R}_+$  auftretenden entsprechenden Abbildung sei auf [BCGH1, BCGH2] verwiesen.

Als Schwerpunkt befasst sich die Arbeit mit den Eigenschaften der Wechselwirkungskette und den daraus resultierenden des zugrundeliegenden Systems. Dabei wollen wir vor allem die hier gezeigten Ergebnisse mit denen der Systeme auf  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{R}_+$  vergleichen (siehe dazu [DG2, DG3]).

Wie auch schon in den vorhergehenden Arbeiten [DG1, DG2, DG3] zeigt sich, dass das Langzeitverhalten des Systems hierarchisch interagierender Diffusionen nur von der Stärke der Interaktion zwischen den einzelnen Hierarchieen abhängt. Ist eine starke Wechselwirkung vorhanden, so bleibt das System *stabil*, wohingegen *Clusterbildung* bei einer schwachen Wechselwirkung auftritt.

Im Falle der Clusterbildung untersuchen wir die typische Größe und Höhe der Cluster, d.h. das mittlere Wachstum von Bereichen ähnlicher Zustände von Teilchen und die mittlere Entfernung der Zustände in diesem Bereich von 0. Auch hier treten, wie auch schon in den beiden vorher betrachteten Fällen  $[0, 1]$  und  $\mathbb{R}_+$ , zwei Arten der Verteilung der Cluster auf:

- (i) *Diffusives* Clustern, d.h. es gibt eine große Bandbreite von Größenordnungen von Clustergrößen, die gleichzeitig auftreten, aber sich, wie schon in den beiden vorher betrachteten Fällen, in Abhängigkeit der Stärke der Wechselwirkung in vorwiegend kleine, mittlere bzw. große Cluster aufteilen lassen. Aufgrund der unterschiedlichen Definitionsbereiche der Diffusionen unterscheiden sich jedoch die mittleren Höhen der Cluster und die Grenzprozesse, gegen die die reskalierte Wechselwirkungskette konvergiert, von denen von Diffusionen auf  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{R}_+$ .

- (ii) Ist die Wechselwirkung des Systems extrem schwach, so tritt – wie wir es nennen wollen – *Macro*-Clustern auf, d.h. die Bereiche, in denen Teilchen gleiches Vorzeichen besitzen, wachsen im Grenzfall unendlicher Zeiten sehr schnell im Vergleich zur Systemgröße, die Größenordnungen der Clustergrößen haben hier jedoch eine kleine Bandbreite. Die geeignet skalierte Wechselwirkungskette konvergiert schwach gegen eine Wechselwirkungskette mit transformierten Wechselwirkungstermen. Hier tritt der hauptsächliche Unterschied des Verhaltens der Wechselwirkungskette und somit des zugrundeliegenden Systems für Diffusionen in Abhängigkeit der Definitionsbereiche auf: Für Diffusionen auf  $[0, 1]$  konnte man in dieser Situation zeigen, dass die Wechselwirkungskette schwach gegen eine Wechselwirkungskette mit zeitlich *konstanten* Übergangskernen konvergiert (vgl. [Kle, Theorem 2] und [DG2, Theorem 4]). Für Diffusionen auf  $\mathbb{R}_+$  tritt *konzentriertes* (auf englisch: *concentrated*) Clustern auf, d.h. die Anzahl der Teilchen, deren Zustand mit maximaler Rate wächst, verschwindet asymptotisch; diese Teilchen vereinigen aber asymptotisch die gesamte Masse auf sich (vgl. [DG3, Theorem 6]).

Der Hauptunterschied im Verhalten der Systeme scheint also in der Symmetrie bzw. Asymmetrie des dem System zugrundeliegenden Definitionsbereichs begründet.

In den meisten Fällen ist das qualitative Verhalten des Systems nur abhängig von der Wahl der Wechselwirkungsterme und nur für extrem schwache Wechselwirkungen nimmt der Definitionsbereich der Diffusionen Einfluss auf das Grenzverhalten des Systems.

## 1.1 Das Modell

In dieser Arbeit untersuchen wir eine Klasse zeitinhomogener Markov-Ketten  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  mit  $j \in \mathbb{Z}_+$ , der  $j$ -ten Iterationsstufe, Startwert

$$(1.1) \quad M_{-j-1}^j(x) := \theta \quad (x \in \mathbb{R})$$

und *zeitinhomogenen* Übergangskern

$$(1.2) \quad K_{-k-1}(x, A) := \Gamma_x^{c_k, g_k}(A) \quad (k = j, \dots, 0, A \in \mathfrak{B}).$$

wobei  $k$  als „Zeit“ oder, wie es in Abschnitt 1.2 genauer erläutert wird, als „Hierarchie“ eines hierarchisch gekoppelten Systems stochastischer Differentialgleichungen interpretiert werden kann. Unter diesem Gesichtspunkt beschreibt  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  die Verteilung des empirischen Mittelwerts der Hierarchie  $-k$  des Systems in einer um einen Faktor proportional zur  $j$ -ten Potenz der Systemgröße beschleunigten Zeitskala.

Der Übergangskern

$$(1.3) \quad \Gamma_\theta^{c_k, g_k}(dx) = \frac{1}{Z_\theta^{c_k, g_k}} \cdot g_k(x)^{-1} \exp \left\{ c_k \int_\theta^x \frac{\theta - \xi}{g_k(\xi)} d\xi \right\} \lambda(dx)$$

( $\lambda$  ist hier das Lebesgue-Maß) mit geeignetem Normierungsfaktor  $Z_\theta^{c_k, g_k}$  ist die Gleichgewichtsverteilung des stochastischen Prozesses  $X_k(t)$ , der der stochastischen Differentialgleichung

$$(1.4) \quad dX_k(t) = c_k(\theta - X_k(t)) dt + \sqrt{2g_k(X_k(t))} dB(t),$$

mit geeigneter Startverteilung (üblicherweise  $\delta_x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) oder Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$ ) genügt (siehe Beweis in Abschnitt 2.2).  $B(t)$  sei dabei eine Standard-Brownsche-Bewegung,  $c_k > 0$  seien Konstanten und  $\theta \in \mathbb{R}$  ist der Startwert der Markov-Kette. Die  $g_k$  werden rekursiv definiert durch  $g_0 := g$ , für ein geeignet gewähltes  $g$ , und

$$(1.5) \quad g_{k+1}(\theta) := \int_{\mathbb{R}} g_k(x) \Gamma_\theta^{c_k, g_k}(dx) \quad (k \in \mathbb{Z}_+, \theta \in \mathbb{R}).$$

$g_{k+1}$  ist das Mittel der Diffusionsfunktion  $g_k$  unter der Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  des stochastischen Prozesses  $X_k$ . Die Folge der stochastischen Differentialgleichungen und damit die Markov-Kette hängt also letztendlich nur noch von der Wahl von  $\theta$ ,  $g$  und den  $c_k$  ab.

Das System (1.4) nicht gekoppelter, stochastischer Differentialgleichungen beschreibt Punkte auf der reellen Achse, die deterministisch auf ein für alle Punkte vorgegebenes  $\theta$  zudriften, dabei aber unabhängig voneinander durch eine Diffusion  $\sqrt{2g_k(X_k(t))} dB(t)$  gestört werden. Die  $c_k$  geben dabei die Stärke der Drift auf  $\theta$  für den  $k$ -ten Punkt an. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung der Rekursion (1.5) und der jeweiligen Konstanten werden in Abschnitt 1.2 genauer beleuchtet. Außerdem sei auf die Arbeiten [CGS] und [DG1, DG2, DG3] verwiesen, in denen die Entstehung des Problems aus der Betrachtung eines Systems von hierarchisch interagierenden Diffusionen in den Fällen  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  bzw.  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  erläutert wird.

Damit Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  von (1.4) gewährleistet sind und die Rekursion (1.5) wohldefiniert ist (siehe Beweis in Abschnitt 2.1 und 3.1), muss  $g$  aus der folgenden Funktionenklasse gewählt werden:

**1.1 DEFINITION.** (Funktionenklassen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}_*$ )

$\mathfrak{G}$  sei die Klasse der Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , die den Bedingungen genügen:

- (i)  $g$  wachse weniger als eine Einheitsparabel in  $x$ , d.h.  
 $\exists C_1 \in [0, 1], C_2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq C_1 x^2 + C_2$ ,
- (ii)  $g$  sei lokal Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}$ , d.h.  
 $\forall n \in \mathbb{N} \exists L_n > 0 \forall x, y \in [-n, n] : |g(x) - g(y)| \leq L_n |x - y|$
- (iii)  $g$  sei positiv, d.h.  $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) > 0$ .

$\mathfrak{G}_*$  sei die Klasse der Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , die der Bedingung

- (i')  $g(x) = o(x^2)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$

und den obigen Bedingungen (ii) und (iii) genügen.

Wie man leicht einsieht gilt  $\mathfrak{G}_* \subset \mathfrak{G}$ . Im Folgenden wollen wir die durch (1.5) definierte Rekursion abkürzen durch:

**1.2 DEFINITION.** (nichtlineare Abbildung auf  $\mathfrak{G}$ )

- (i) Für  $c > 0$  und  $g \in \mathfrak{G}$  sei  $(F_c g)(\theta) := \int_{\mathbb{R}} g(x) \Gamma_{\theta}^{c, g}(dx)$ .
- (ii) Für  $c_k > 0$  ( $k = 0, \dots, n$ ),  $n \geq 0$  und  $g \in \mathfrak{G}_*$  sei  $F^n g := (F_{c_n} \circ \dots \circ F_{c_0})g$ .

Für die Existenz einer eindeutigen, starken Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.4) würde es in obiger Definition genügen (i) mit  $C_1 \geq 0$ , (ii) und (iii) zu fordern (vgl. Abschnitt 2.1). Dass  $C_1 \in [0, 1]$  gewählt wird, garantiert uns die Wohldefiniertheit des Operators  $F_c$  (vgl. Lemma 1.3 und Satz 3.3).

Die weitere Einschränkung (i') ist nötig, um die Existenz der Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}$  zu zeigen (vgl. Lemma 2.9 in Abschnitt 2.2.2). Für Funktionen  $g \in \mathfrak{G}$  wird die in Abschnitt 2.2.2 berechnete Form der Gleichgewichtsverteilung einfach „extrapoliert“. Zum anderen können wir so zeigen, dass für  $g_0 \in \mathfrak{G}_*$  auch  $g_n = F^n g_0 \in \mathfrak{G}_*$  und somit der Orbit  $F^n g_0$  wohldefiniert ist. Für beliebige Funktionen  $g_0 \in \mathfrak{G}$  können wir dies nicht erwarten (vgl. Abschnitt 4.2).

Ist  $g \in \mathfrak{G}_*$ , so ist die Markov-Kette  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}_+$  wohldefiniert, denn es gilt (für einen Beweis siehe Abschnitt 3.1):

**1.3 LEMMA.** (Wohldefiniertheit)

- (i)  $F_c$  ist auf  $\mathfrak{G}$  wohldefiniert.
- (ii) Ist  $g \in \mathfrak{G}_*$ , so auch  $F_c g$ .
- (iii) Ist  $g \in \mathfrak{G}$ , so ist die Funktion  $\theta \mapsto (Fg)(\theta)$  Element von  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ .

Somit liegt mit  $g_0 \in \mathfrak{G}_*$  bei Rekursion (1.5) auch jedes  $g_k$  für  $k \in \mathbb{N}$  in  $\mathfrak{G}_*$ , die zugehörigen stochastischen Differentialgleichungen (1.4) haben eindeutige, starke Lösungen und es existiert die Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}$ , die als Übergangskern der damit wohldefinierten Markov-Kette  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  für  $j \in \mathbb{Z}_+$  dient. Teil (iii) des obigen Lemmas zeigt insbesondere die stark glättende Eigenschaft der Abbildung  $F_c$ , die wir auch in Abschnitt 4.1 sehen werden. Da wir diese Eigenschaft aber nicht für unsere weiteren Ergebnisse benötigen, werden wir für den Beweis auf [BCGH1] verweisen.

Eine wichtige Rolle spielen die Fixpunkte der Abbildung  $F_c$ , da es einfacher ist die Eigenschaften der Markov-Kette (siehe Theoreme 1.8, 1.9 und 1.13) für einen Fixpunkt der Rekursion (1.5) zu zeigen und diese dann mit analytischen Mitteln für beliebige  $g \in \mathfrak{G}_*$  zu verallgemeinern. Auch wir wollen die Ergebnisse hauptsächlich nur für die Fixpunkte der Rekursion beweisen und für die Verallgemeinerung auf eine evtl. später veröffentlichte Fortsetzung dieser Arbeit verweisen.

1.4 BEMERKUNG. Eine einfache Rechnung zeigt, dass für  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$  die Funktion  $g_0 := \sigma^2$  Element von  $\mathfrak{G}_*$  ist, und für beliebige  $c > 0$  gilt:  $F_c \sigma^2 \equiv \sigma^2$ .

Weiterhin kann man beweisen, dass die Funktionen der Klasse  $g \equiv \sigma^2$  die einzigen Fixpunkte der Abbildung  $F_c$  sind.

Für die beiden anderen bisher betrachteten Fälle tritt außerdem der Fall einer *Fixform* auf (engl.: fixed shape), d.h. es gilt für ein  $\lambda(c) \notin \{0, 1\}$  in Abhängigkeit von  $c$ :  $F_c g = \lambda(c)g$ . Auf Fixformen lassen sich ähnliche Verfahren anwenden, wie auf Fixpunkte. In der folgenden Tabelle sind die Fixpunkte bzw. Fixformen für die bisher betrachteten Zustandsräume zusammengefasst (vgl. [BCGH1, BCGH2]):

Zustandsraum	Fixform	Fixpunkt
$[0, 1]$	$ax(1 - x), a > 0$ Fisher-Wright-Diffusion	—
$\mathbb{R}_+$	$ax^2 + bx, 0 < a < 1, b \geq 0$ Skalarfeld in nichtstationärem, zufälligem Potential (siehe [MRSZ])	$ax, a > 0$ Fellers Verzweigungsprozess
$\mathbb{R}$	$ax^2 + b, 0 < a < 1, b > 0$ unbenannt <sup>1</sup>	$\sigma^2, \sigma \in \mathbb{R}^\times$ kritischer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Dabei ist zu beachten, dass die Fixform  $g(x) = ax(1 - x)$  für den Zustandsraum  $[0, 1]$  einen wohldefinierten Orbit  $F^n g$  besitzt, die Fixformen der Zustandsräume  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}$  jedoch nicht (vgl. [BCGH1, Gleichung 0.21], [BCGH2, Lemma 5] und Abschnitt 4.2).

## 1.2 Wahrscheinlichkeitstheoretischer Hintergrund

Auf das in Abschnitt 1.1 definierte Modell stößt man, wenn man ein System von  $N \in \mathbb{N}$  gekoppelten stochastischen Differentialgleichungen auf  $\mathbb{R}$  der Form

$$(1.6) \quad \begin{aligned} dY^{(i,N)}(t) &= c \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y^{(j,N)}(t) - Y^{(i,N)}(t) \right) dt + \sqrt{2g(Y^{(i,N)}(t))} dB^{(i)}(t) \\ Y^{(i,N)}(0) &= \theta \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

betrachtet, wobei  $g \in \mathfrak{G}_*$  und somit Gleichung (1.6) eindeutige starke Lösungen besitzt.  $(B^{(i)}(t))_{i=1, \dots, N}$  seien dabei unabhängige Standard-Brownsche-Bewegungen. Die Wechselwirkung zwischen den Zuständen der einzelnen „Teilchen“ und dem Mittelwert des Systems wird mit  $c$  gewichtet. Die Zustände der „Teilchen“ dieses gekoppelten Systems erfahren eine Drift zum arithmetischen Mittel der Zustände des Gesamtsystems, haben aber den selben Diffusionsterm wie (1.4). Unter den Zuständen der Teilchen könnte man sich zum Beispiel eine zufällige Ladungsverteilung auf  $\{1, \dots, N\}$  vorstellen.

Ähnliche gekoppelte stochastische Differentialgleichungen – jedoch auf  $[0, 1]$  bzw. auf  $\mathbb{R}_+$  – werden in [DG2] bzw. in [DG3] betrachtet. Dort kann man die Zustände der Teilchen z.B. als Häufigkeit von Individuen eine bestimmte Eigenschaft zu besitzen oder Masse der Teilchen interpretieren.

Es lässt sich nun zeigen (vgl. [Sau, Theorem 1] für den Fall  $g \equiv \sigma^2$ ), dass im Falle großer Systeme ( $N \rightarrow \infty$ ) die Differentialgleichungen entkoppeln und es gilt

$$(1.7) \quad \mathcal{L}[(Y^{(1,N)}(t), \dots, Y^{(k,N)}(t))_{t \geq 0}] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (\mathcal{L}[(Z(t))_{t \geq 0}])^{\otimes k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

wobei  $(Z(t))_{t \geq 0}$  die eindeutig bestimmte starke Lösung der Differentialgleichung

$$(1.8) \quad \begin{aligned} dZ(t) &= c(\theta - Z(t)) dt + \sqrt{2g(Z(t))} dB(t) \\ Z(0) &= \theta \end{aligned}$$

ist, die bis auf den Startwert mit der von  $X_0(t)$  übereinstimmt (vgl. (1.4)). Dies lässt sich dadurch erklären, dass sich der Mittelwert der Zustände des Systems, der ja mit  $\theta$  startet, für große  $N$  in einer sehr viel langsameren Zeitskala verändert als die Prozesse  $Y^{(i,N)}$ .

<sup>1</sup>Bei der Simulation der Iteration der  $g_k$  (vgl. Abschnitt 4.2) scheint es, dass ähnlich wie beim Zustandsraum  $\mathbb{R}_+$  Fixformen der Form  $ax^2 + b$  mit  $0 < a < 1$  und  $b > 0$  auftreten.

Um zu klären in welcher Zeitskala sich der Mittelwert ändert, betrachtet man den empirischen Mittelwert des proportional zur Größe des Systems beschleunigten Systems (1.6) ( $t \mapsto tN$ )

$$(1.9) \quad \widehat{Y}^N(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y^{(i,N)}(tN),$$

der die eindeutig bestimmte starke Lösung der Differentialgleichung

$$(1.10) \quad \begin{aligned} d\widehat{Y}^N(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{2g(Y^{(i,N)}(tN))} dB^{(i)}(tN) \\ \widehat{Y}^N(0) &= \theta \end{aligned}$$

ist (Einsetzen von (1.6) in (1.9)).

Das empirische Mittel in der reskalierten Zeit konvergiert wiederum schwach in Verteilung gegen einen stochastischen Prozess ähnlich (1.8) (vgl. [Sau, Theorem 2] für den Fall  $g \equiv \sigma^2$ ):

$$(1.11) \quad \mathcal{L}[(\widehat{Y}^N(t))_{t \geq 0}] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(\widehat{Z}(t))_{t \geq 0}],$$

wobei  $\widehat{Z}$  die eindeutig bestimmte starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$(1.12) \quad \begin{aligned} d\widehat{Z}(t) &= \sqrt{2(F_c g)(\widehat{Z}(t))} dB(t) \\ \widehat{Z}(0) &= \theta \end{aligned}$$

ist, d.h. eines Diffusionsprozesses ohne Drift aber mit *transformierter* Diffusionsfunktion  $F_c g$ .

Das Ergebnis wird einsichtig, wenn man sich überlegt, dass  $(F_c g)(\theta)$  nach Definition von  $F_c$  das Mittel von  $g(x)$  unter der Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_{\theta}^{c,g}(dx)$  des Prozesses  $(Z(t))_{t \geq 0}$  ist. Da für Brownsche-Bewegungen  $\mathcal{L}[N^{-\frac{1}{2}} B^{(i)}(tN)] = \mathcal{L}[B^{(i)}(t)]$  gilt, lässt sich (1.10) umformen in

$$d\widehat{Y}^N(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2}{N} g(Y^{(i,N)}(tN))} dB^{(i)}(t).$$

Somit hat also das reskalierte empirische Mittel  $\widehat{Y}^N(t)$  für  $N \rightarrow \infty$  als lokale Diffusionsrate den Mittelwert der Diffusionsraten der einzelnen  $Y^{(i,N)}(t)$  unter ihrer Gleichgewichtsverteilung, die ja für  $N \rightarrow \infty$  gleich der von  $(Z(t))_{t \geq 0}$  ist, nämlich  $\Gamma_{\theta}^{c,g}$ .

Die Markov-Kette  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  entsteht, wenn man anstelle (1.6) ein System hierarchisch gekoppelter stochastischer Differentialgleichungen betrachtet (vgl. dazu [DG3]).

Diese abzählbar unendliche Hierarchie stochastischer Differentialgleichungen wird indiziert durch die abelsche Gruppe  $\Lambda_N$  ( $N \geq 2$ ) mit kanonischer Definition der Addition „+“ und Abstand zwischen zwei Elementen  $d(\cdot, \cdot)$ :

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \Lambda_N &:= \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \mid \lambda_i \in \{0, \dots, N-1\}, \text{card}(i \mid \lambda_i \neq 0) < \infty\} \\ \lambda + \lambda' &:= (\lambda_1 + \lambda'_1 \bmod N, \dots) \\ d(\lambda, \lambda') &:= \min\{k \mid \forall j > k : \lambda_j = \lambda'_j\}. \end{aligned}$$

$N$  entspricht auch hier der Größe der einzelnen Hierarchien wie in (1.6), nur sind es jetzt abzählbar viele davon. Da für beliebige  $\lambda \in \Lambda_N$  aufgrund der Bedingung  $\text{card}(i \mid \lambda_i \neq 0) < \infty$  schließlich alle  $\lambda_i = 0$  sind, ist  $d(\cdot, \cdot)$  immer endlich.

Wie in (1.6) wird nun ein abzählbares, gekoppeltes System stochastischer Differentialgleichungen betrachtet:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} d\widetilde{Y}^{(\lambda,N)}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{N^{k-1}} \left( \frac{1}{N^k} \sum_{\lambda': d(\lambda', \lambda) \leq k} \widetilde{Y}^{(\lambda', N)}(t) - \widetilde{Y}^{(\lambda, N)}(t) \right) dt + \\ &\quad + \sqrt{2g(\widetilde{Y}^{(\lambda, N)}(t))} dB^{(\lambda)}(t) \\ \widetilde{Y}^{(\lambda, N)}(0) &= \theta \quad (\lambda \in \Lambda_N), \end{aligned}$$

wobei  $c_k > 0$  für alle  $k$  und  $\sum_k c_k N^{-k} < \infty$ , so dass die linke Summe wohldefiniert ist,  $g$  sei aus  $\mathfrak{G}_*$  gewählt und  $B^{(\lambda)}(t)$  seien unabhängige Standard-Brownsche-Bewegungen.

Für  $k = 1$  entspricht (1.14) der Gleichung (1.6) mit  $c = c_0$ , denn es gibt genau  $N$  „Teilchen“, die zu  $\lambda$  einen Abstand  $\leq 1$  haben, also höchstens in der ersten Hierarchie von  $\lambda$  abweichen. Für  $k = 2$  wird dazu noch die Drift auf den Mittelwert aller  $N^2$  „Teilchen“ addiert, die Abstand  $\leq 2$  zu  $\lambda$  haben – jetzt aber mit dem Faktor  $c_1$  geteilt durch die Anzahl der „Teilchen“, mit denen bereits eine Stufe vorher interagiert wurde, gewichtet. Für beliebiges  $k$  verfährt man analog. Die  $c_k$  geben also an, wie stark jedes Teilchen mit dem Mittelwert der  $k$ -ten Hierarchie interagiert.

Die hierarchische Anordnung findet vor allem in der mathematischen Biologie Verwendung, um ein Modell für Verwandtschaft von Individuen zu beschreiben. Die Hierarchien können dabei z.B. als einzelne Individuen ( $k = 0$ ), die Familie der das Individuum angehört ( $k = 1$ ), die Sippe der die Familie angehört ( $k = 2$ ) usw. interpretiert werden. Aus dieser Sichtweise macht auch die Verwendung des Abstandes  $d$  Sinn, der die Verwandtschaft zweier unterschiedlicher Individuen als die erste Hierarchie, ab der die Eigenschaften der beiden übereinstimmen, charakterisiert.

Genau wie vorher betrachtet man wieder das empirische Mittel der Zustände der „Teilchen“, diesmal jedoch ohne Veränderung der Zeitskala (vgl. (1.9)):

$$(1.15) \quad \widehat{Y}_k^{(\lambda, N)}(t) := \frac{1}{N^k} \sum_{\lambda': d(\lambda', \lambda) \leq k} \widetilde{Y}^{(\lambda', N)}(t) \quad (\lambda \in \Lambda_N, k \in \mathbb{Z}_+).$$

Da das empirische Mittel jetzt aber noch zusätzlich von der Hierarchie  $k$  abhängt, bis zu der unterschieden wird, stellt sich die Frage, wie die Zeitskala des empirischen Mittels zu reskalieren ist. Man betrachtet also im Folgenden das skalierte System (Skalierung des Raums durch den Übergang zum  $k$ -ten Blockmittel und Skalierung der Zeit durch den Faktor  $N^j$ ):

$$(1.16) \quad \left( \widehat{Y}_k^{(\lambda, N)}(tN^j) \right)_{\lambda \in \Lambda_N} \quad (j \in \mathbb{Z}_+).$$

Dieses System entspricht dem von (1.9), allerdings bleibt hier die Zeitskala variabel.

Es zeigt sich, dass gilt (zum Beweis vgl. [DG3]):

**1.5 THEOREM.** Sei  $\widetilde{Y}^{(\lambda, N)}$  und  $\widehat{Y}_k^{(\lambda, N)}$  definiert wie in (1.14) bzw. (1.15) und sei  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, für die gilt:

- (i)  $s(N) \uparrow \infty$  für  $N \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $N^{-1}s(N) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ .

Dann gilt:

$$(1.17) \quad \mathcal{L} \left[ \left( \widehat{Y}_{-k}^{(\lambda, N)}(s(N)N^j) \right)_{k=-j-1, \dots, 0} \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}],$$

wobei  $M_k^j$  definiert ist durch (1.1–1.2).

Beobachtet man das System nach einer langen Zeit  $s(N)N^j$  und skaliert man den Raum entsprechend mit Blockmitteln der Ordnung  $k = 0, \dots, j+1$ , so konvergiert die Verteilung dieses Vektors schwach gegen die der Markov-Kette. Auch hier entkoppeln wie bei (1.7) die einzelnen Komponenten und der Grenzprozess wird unabhängig von dem Multiindex  $\lambda$ . Durch die Betrachtung der unterschiedlichen Hierarchien  $k$  *unabhängig* von der Zeitskala  $j$  – der Multiple Space-Time Scale Analysis – erhält man eine detaillierte Vorstellung der bei dem Modell auftretenden Phänomene, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

### 1.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt sind die Sätze und Theoreme zusammengefasst, die wir in dieser Arbeit über die Markov-Kette beweisen werden. Wir werden außerdem den Zusammenhang zum ursprünglichen Modell (1.14) herausarbeiten und interpretieren. Die Beweise zu den folgenden Sätzen und Theoremen finden sich in Kapitel 3.

### 1.3.1 Grundlegende Eigenschaften der Markov-Kette

Für die weiteren Betrachtungen, insbesondere für Theorem 1.8, ist es von Bedeutung das erste und zweite Moment der Markov-Kette zu kennen.

**1.6 SATZ.** Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  eine Markov-Kette definiert durch (1.1–1.2) und (1.5) mit  $g \in \mathfrak{G}_*$ , dann gilt für  $-j-1 \leq k \leq 0$ :

$$\mathbf{E}[M_k^j] = \theta$$

$$\mathbf{E}[(M_k^j)^2] = \theta^2 + (F^j g)(\theta) \sum_{l=-k}^j \frac{1}{c_l}.$$

Insbesondere ergibt sich für die Varianz

$$\mathbf{Var}[M_k^j] = (F^j g)(\theta) \sum_{l=-k}^j \frac{1}{c_l}.$$

Der Erwartungswert der Markov-Kette bleibt also bei jedem Iterationsschritt konstant, die Verteilung streut aber mehr und mehr in Abhängigkeit der  $c_k$ . Insbesondere ergibt sich, dass  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  für festes  $j \in \mathbb{Z}_+$  ein Martingal ist.

**1.7 SATZ.** Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  eine Markov-Kette definiert durch (1.1–1.2) und (1.5) mit  $g \in \mathfrak{G}_*$ , dann ist  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}_+$  ein quadratintegrables Martingal.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich der Diffusionslimes der Markov-Kette mit dem Invarianzprinzip für Martingale bestimmen.

### 1.3.2 Verhalten der Markov-Kette für $j \rightarrow \infty$

Es stellt sich die Frage, wie sich die Markov-Kette für große  $j$  verhält, und ob ein Grenzübergang  $j \rightarrow \infty$  möglich ist. Man versucht also eine Art *Entrance Law* für die Übergangskerne der Markov-Kette zu finden, d.h. eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}_-}$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $\alpha_{k+1} = \alpha_k K_{-k}$ . Die Wahrscheinlichkeitsmaße  $\alpha_k$  werden von den Übergangskernen  $(K_{-k})_{k \in \mathbb{N}}$  der Markov-Kette „transportiert“, die für alle  $k \in \mathbb{N}$  definiert sind (vgl. (1.2), (1.5) und Lemma 1.3). Ist es möglich eine solche Folge zu finden mit  $\alpha_{-\infty} = \delta_\theta$ , so setzt man  $\mathcal{L}[M_k^\infty] := \alpha_k$  und hat damit die Verteilung der gesuchten Markov-Kette  $(M_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_-}$  konstruiert.

Zur Vereinfachung der Betrachtungen wollen wir im Folgenden nur den Fall  $g \equiv \sigma^2$  mit  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$  betrachten. Es gilt somit für alle  $j \in \mathbb{N}$  und  $\theta \in \mathbb{R}$ , dass  $(F^j g)(\theta) = \sigma^2$ . Daraus folgt insbesondere, dass die Übergangskerne  $K_{-k}(x, A)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  normalverteilt sind mit erstem Moment  $x$  und Varianz  $\sigma^2/c_k$ .

Nach Satz 1.6 ist es einsichtig, dass die Konstruktion eines Entrance Laws nur zu nichttrivialen Lösungen führt, falls die Summe der  $c_k^{-1}$  konvergiert, d.h. die „Punkte“ in (1.4) bzw. „Teilchen“ im System (1.14) einer *starken* Drift auf  $\theta$  bzw. dem empirischen Mittel ausgesetzt sind. Im Fall der Divergenz der Summe der  $c_k^{-1}$ , d.h. einer *schwachen* Drift, wird die Varianz der Verteilung von  $M_0^j$  für  $j \rightarrow \infty$  nach Satz 1.6 unendlich. Aus dem gleichen Grund wird es aber auch die Varianz der Verteilung von  $M_k^j$  für alle  $k \in \mathbb{Z}_-$  und  $j \rightarrow \infty$ .

**1.8 THEOREM.** (Entrance Law oder Divergenz)

Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  eine Markov-Kette definiert durch (1.1–1.2) und (1.5) mit  $g \equiv \sigma^2$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$ , dann gilt:

(i) Ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k^{-1} < \infty$ , so ist die Markov-Kette  $(M_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_-}$  wohldefiniert und es gilt:

$$\mathcal{L}[(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(M_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_-}].$$

Der Grenzprozess  $M_k^\infty$  hat wiederum die Markov-Eigenschaft mit Übergangskern (1.2) und  $M_{-\infty}^\infty \equiv \theta$ .

(ii) Ist  $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k^{-1} = \infty$ , so gilt für alle  $k \in \mathbb{Z}_-$ :

$$\mathcal{L}[M_k^j] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \delta_{-\infty} + \frac{1}{2} \delta_{+\infty}.$$

Das Theorem lässt sich unter denselben Voraussetzungen mit etwas Aufwand auf Funktionen  $g \in \mathfrak{G}_*$  verallgemeinern: Für (i) geht man dabei ähnlich vor wie in [DG3, Abschnitt B.4] und zeigt, dass im Fall  $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k^{-1} < \infty$  auch der Grenzwert  $(F^j g)(\theta)$  für  $j \rightarrow \infty$  existiert und endlich ist. Somit ist auch für beliebige  $g \in \mathfrak{G}_*$  die Varianz der  $M_k^j$  für  $j \rightarrow \infty$  endlich und wir können den Beweis analog zu dem des Theorems 1.8(i) führen. Im Fall (ii) muss man sich nur überlegen, dass sich die Verteilungen der Übergangskerne der Markov-Kette  $M_k^j$  für große  $j$  und  $k \rightarrow 0$  durch geeignete normal verteilte Zufallsvariablen annähern lassen. Der Beweis lässt sich dann wiederum analog dem des Theorems 1.8(ii) führen. Konvergiert z.B.  $F^j g$  für  $j \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen eine Konstante  $\sigma^2$  mit  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$ , so ist dies offensichtlich möglich. Für Funktionen  $g \in \mathfrak{G}_*$ , deren Orbit unter der Abbildung  $F$  nicht durch positive Konstanten beschränkt werden kann, ist uns allerdings noch nicht klar wie ein Beweis des dem Theorem 1.8(ii) entsprechenden Theorems geführt werden kann.

Die Bedingung, ob ein nichttriviales Entrance Law existiert, hängt somit nur von den  $c_k$  ab,  $\theta$  und  $g$  spielen dabei keine Rolle. Deshalb verwundert es nicht, dass entsprechende Ergebnisse auch in den beiden Fällen  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  bzw.  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  bewiesen wurden (vgl. [DG2] bzw. [DG3]). Die Grenzverteilung im Fall (ii) des Theorems ändert sich jedoch entsprechend des Definitionsbereichs von  $g$ :

Zustandsraum	Grenzverteilung
$[0, 1]$	$(1 - \theta)\delta_0 + \theta\delta_1$
$\mathbb{R}_+$	$\delta_0$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}\delta_{-\infty} + \frac{1}{2}\delta_{+\infty}$

Dabei fällt auf, dass für das System mit beschränktem Zustandsraum  $[0, 1]$  die Grenzverteilung von dem Startwert  $\theta \in [0, 1]$  des Systems abhängt, für die beiden Systeme mit unbeschränktem Zustandsraum spielt dagegen der Startwert keine Rolle.

Das Verhalten des Systems hierarchisch interagierender stochastischer Differentialgleichungen (1.14) kann man somit in zwei Fälle unabhängig von  $g \in \mathfrak{G}_*$  und  $\theta \in \mathbb{R}$  aufteilen:

(i) *Starke* Interaktion der Teilchen:

Die Verteilung der einzelnen „Teilchen“ (die 0-te Hierarchie in (1.15) entspricht einem einzelnen Teilchen in der um den Faktor  $N^j$  beschleunigten Zeit) entkoppelt im Grenzfall für  $N \rightarrow \infty$ , wie wir auch in Theorem 1.5 gesehen haben, und konvergiert in jeder noch so schnellen Zeitskala in Verteilung gegen einen Grenzprozess mit Erwartungswert  $\theta$  und endlicher Varianz. Man nennt dieses Verhalten des Systems *stabil*.

(ii) *Schwache* Interaktion der Teilchen:

Im Grenzfall schneller Zeitskalen nähern sich die Teilchen immer mehr den Grenzen des Definitionsbereiches  $-\infty$  bzw.  $+\infty$  an. Da beide „Grenzwerte“ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, wird es Bereiche geben, in denen sich hauptsächlich Teilchen mit großen positiven Werten befinden, und andere, in denen sich hauptsächlich welche mit kleinen negativen Werten befinden. Diese Bereiche werden *Cluster* genannt, und man sagt, dass das System *clustert*.

### 1.3.3 Genauere Analyse der Clusterbildung

Für den Fall der Divergenz der Summe der  $c_k^{-1}$  stellt sich die Frage, ob es möglich ist die Markov-Kette und die Zeitvariable  $k$  geeignet zu skalieren und dadurch doch noch nichttriviale Konvergenz dieses skalierten Prozesses zu erreichen. Der resultierende Grenzprozess der reskalierten Markov-Kette gibt dann, wie wir sehen werden, Aufschluss über die mittlere Höhe und Größe der Cluster.

Um die weitere Analyse zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$  mit  $c \in [0, \infty]$  existiert. Dies ist nicht wirklich eine Einschränkung, da die typischen Folgen von Wechselwirkungstermen, die hier von Interesse sind, sogar monoton steigend bzw. fallend sind, wie wir in den folgenden Korollaren sehen werden, und der Übergang von einem Bereich der Clusterbildung zum nächsten wird für Nullfolgen auftreten (vgl. (1.18)).

Unter dieser Prämisse zeigt sich, dass auch das Verhalten der Clusterbildung in Abhängigkeit der Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  in zwei Bereiche aufzuteilen ist, nämlich

- (i) dem *diffusives* Clustern und
- (ii) dem – wie wir es nennen wollen – *Macro*-Clustern.

Die beiden Bereiche werden dabei durch das Kriterium

$$(1.18) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} \begin{cases} = \infty & \text{diffusives Clustern} \\ < \infty & \text{Macro-Clustern} \end{cases}$$

voneinander unterschieden.

Würde man nicht fordern, dass der Grenzwert der Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  existiert, so wäre es möglich, dass  $\limsup c_j \sum_{k=0}^j c_k^{-1} = \infty$  aber  $\liminf c_j \sum_{k=0}^j c_k^{-1} < \infty$ , und das System würde sowohl das Verhalten des diffusiven als auch des Macro-Clusterns aufweisen. Dabei wäre es kaum möglich zu unterscheiden wie sich das System konkret verhalten würde.

Auch für hierarchisch interagierende Diffusionen auf  $[0, 1]$  bzw.  $\mathbb{R}_+$  kann das Verhalten der Cluster nach dem Kriterium (1.18) in zwei Bereiche aufgeteilt werden. Für den Bereich (i) ergibt sich jeweils diffusives Clustern, in Bereich (ii) unterscheidet sich jedoch grundsätzlich das Verhalten je nach Definitionsbereich.

### Bereich (i): Diffusives Clustern

Betrachten wir zunächst den Fall des diffusiven Clusterns. Es zeigt sich, dass die Wechselwirkungskette bei geeigneter Skalierung schwach in Verteilung gegen eine Standard-Brownsche-Bewegung konvergiert. Für den Beweis ist hierbei entscheidend, dass die Markov-Kette ein quadratintegrables Martingal ist, das die Lindeberg-Bedingung erfüllt, was aus Satz 1.6, Satz 1.7 und dem Kriterium (1.18) folgt.

#### 1.9 THEOREM. (Diffusives Clustern)

Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  eine Markov-Kette definiert durch (1.1–1.2) und (1.5) mit  $g \equiv \sigma^2$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$ . Sei außerdem  $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k^{-1} = \infty$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j c_k^{-1} = \infty$  und  $h(j)$  definiert als

$$h(j) := \sigma \left( \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{Var}[M_0^j]},$$

dann existiert eine Folge von Funktionen  $f_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}_-$  mit den Eigenschaften

- (i)  $f_j$  ist monoton fallend für alle  $j \in \mathbb{Z}_+$ ,
- (ii)  $f_j(0) = 0$  und  $f_j(1) = -j - 1$ ,

so dass die reskalierte Markov-Kette in Verteilung gegen eine Standard-Brownsche-Bewegung auf  $[0, 1]$   $(B(\alpha))_{\alpha \in [0, 1]}$  konvergiert:

$$\mathcal{L}[(h(j)^{-1} M_{f_j(\alpha)}^j)_{\alpha \in [0, 1]}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(B(\alpha))_{\alpha \in [0, 1]}].$$

Aus einer heuristischen Überlegung folgt leicht, dass die Raumskalierung  $h$  als die Höhe und die Zeitskalierung  $f$  als die räumliche Ausdehnung der Cluster interpretiert werden kann: Betrachtet man den Zustand des Teilchens  $\tilde{Y}^{(\lambda, N)}$ , mit  $\lambda \in \Lambda_N$  beliebig, so ist man bei der Bestimmung der Höhe und Größe des Clusters, in dem sich das Teilchen gerade befindet, interessiert in welcher Kugelumgebung  $\{\lambda' \in \Lambda_N \mid d(\lambda, \lambda') \leq k\}$  um  $\lambda$  mit Radius  $k$  die Zustände der Teilchen mit dem des Teilchens an der Stelle  $\lambda$  in etwa übereinstimmen.

Wir wollen diese Kugelumgebungen jedoch nicht statisch bei fester Raumskalierung  $k$  und zu festen Zeitpunkten  $t$  betrachten, sondern wir fragen uns, wie sich diese Kugelumgebung ähnlichen Verhaltens zeitlich verändert. Dazu führen wir eine Funktion  $f_t(\alpha) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit entsprechenden Eigenschaften (i) und (ii) wie in Theorem 1.9 für  $t \in \mathbb{R}_+$  ein, die für festes  $t$  das Intervall  $[0, 1]$  monoton auf die für das System schon verstrichene Zeit  $[0, t]$  abbildet:

- (i)  $f_t$  ist monoton wachsend für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ ,
- (ii)  $f_t(0) = 0$  und  $f_t(1) = t$ .

Anstatt jedes Teilchen einzeln zu betrachten gehen wir zum empirischen Mittel der Zustände in dieser Kugelumgebung über und skalieren dessen Höhe mit  $h(t)^{-1}$ . Die Funktionen  $f_t(\alpha)$  und  $h(t)$ , für die sich für

$$(1.19) \quad h(t)^{-1} \widehat{Y}_{f_t(\alpha)}^{(\lambda, N)}$$

im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  ein nichttrivialer Grenzprozess ergibt, werden daher mit *Größe* bzw. *Höhe* des Clusters, in dem  $\widehat{Y}^{(\lambda, N)}$  liegt, bezeichnet.

Da der Fall für endliches  $N$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  schwer zu behandeln ist, betrachtet man stattdessen den Limes  $N \rightarrow \infty$  von (1.19) in der passenden Zeitskala  $s(N)N^j$ . Mit Theorem 1.5 reduziert sich dadurch das Problem auf das Auffinden von Funktionen  $f_j(\alpha)$  und  $h(j)$ , für die

$$h(j)^{-1}M_{f_j(\alpha)}^j$$

gegen einen geeigneten nichttrivialen Grenzprozess für  $j \rightarrow \infty$  konvergiert. Man beachte, dass sich dabei die Zeitskala invertiert:  $t = 0$  entspricht  $k = 0$  aber  $t = s(N)N^j$  entspricht  $k = -j - 1$ .

Wie wir in Theorem 1.9 gesehen haben, konvergiert die reskalierte Markov-Kette für beliebige  $\alpha \in [0, 1]$  schwach gegen eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz  $\alpha$ . D.h. insbesondere, dass asymptotisch für  $j \rightarrow \infty$  ein ganzes Kontinuum von Clustergrößen der Größenordnung  $f_j(\alpha)$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  in der Zeitskala  $N^j$  des ursprünglichen Systems bzw. in der Zeitskala  $j$  der Markov-Kette auftritt. Daher teilt man die räumliche Clustergröße typischerweise in Abhängigkeit des asymptotischen Verhaltens der Funktion  $f_j(\alpha)$  in drei Kategorien ein, nach denen wir auch unsere Beispiele ordnen werden:

- (i) Kleine Cluster:  
Für alle  $\alpha \in (0, 1)$  gilt:  $f_j(\alpha)/j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ ,  
d.h. die Funktionenfolge  $f_j$  wächst im Vergleich zur Zeitskala  $N^j$  sehr wenig.
- (ii) Mittlere Cluster:  
Es gibt eine nichtkonstante Funktion  $f_\infty$ , so dass gilt:  $f_j(\alpha)/j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f_\infty(\alpha)$ ,  
d.h. die Funktionenfolge  $f_j$  wächst in Abhängigkeit von  $\alpha$  in der selben Größenordnung wie die Zeitskala  $N^j$  und es ergibt sich in Abhängigkeit von  $\alpha$  ein Kontinuum von Clustergrößen.
- (iii) Große Cluster:  
Für alle  $\alpha \in (0, 1)$  gilt:  $f_j(\alpha)/j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -1$ ,  
d.h. die Funktionenfolge  $f_j$  wächst der gleichen Größenordnung wie die Zeitskala  $N^j$ . Asymptotisch gilt  $f_j(\alpha) \sim -j$  unabhängig von  $\alpha$ .

Bei großen Clustern wird es im Gegensatz zum Macro-Clustern aber immer Cluster in kleineren Größenordnungen geben, allerdings mit verschwindender Wahrscheinlichkeit für  $j \rightarrow \infty$ .

Für spezielle Folgen  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  lässt sich  $f_j$  konkret bestimmen. Der Beweis des Theorems 1.9 zeigt nämlich, dass  $f_j(\alpha)$  durch die Gleichung

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{-f_j(\alpha)} \frac{1}{c_k} \bigg/ \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} = \alpha$$

asymptotisch bestimmt ist. Dies wollen wir uns zunutze machen und im Folgenden für typische Wechselwirkungsterme das Verhalten des Systems diskutieren:

**1.10 KOROLLAR.** (Beispiel für kleine Cluster)

Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  wie in Theorem 1.9 definiert. Ist  $c_k = c(k+1)$  mit  $c > 0$ , so gilt:

$$f_j(\alpha) = -\lfloor (j+2)^\alpha \rfloor + 1 \text{ und} \\ \mathcal{L}[(h(j)^{-1}M_{f_j(\alpha)}^j)_{\alpha \in [0,1]}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(B(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}].$$

Die Höhe der Cluster wächst in diesem Beispiel nur logarithmisch, die Größe der Cluster verglichen mit der Zeitskala bzw. Systemgröße nur sehr langsam.

**1.11 KOROLLAR.** (Beispiel für mittlere Cluster)

Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  wie in Theorem 1.9 definiert. Ist  $c_k = c(k+1)^\beta$  mit  $c > 0$  und  $\beta \in (-\infty, 1)$ , so gilt:

$$f_j(\alpha) = -\lfloor \alpha(j+1) \rfloor \text{ und} \\ \mathcal{L}[(h(j)^{-1}M_{f_j(\alpha)}^j)_{\alpha \in [0,1]}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(B(\alpha^{1-\beta}))_{\alpha \in [0,1]}].$$

Dieses Beispiel schließt mit  $\beta = 0$  auch den Fall  $c_k \equiv c$  ein. Die Höhe der Cluster wächst mit Exponent  $\frac{1-\beta}{2}$ . Die Clustergröße relativ zur Zeitskala  $f_j(\alpha)/j \rightarrow f_\infty(\alpha) = -\alpha$  wächst hier jedoch *abhängig* von  $\alpha$ . Insbesondere ist die Verteilung der Cluster in der Größenordnung  $N^{\alpha j}$  explizit durch die in der Zeit reskalierte Standard-Brownsche-Bewegung  $(B(\alpha^{1-\beta}))_{\alpha \in [0,1]}$  gegeben.

**1.12 KOROLLAR.** (Beispiel für große Cluster)

Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  wie in Theorem 1.9 definiert. Ist  $c_k = c \exp\{-ak^b\}$  mit  $c > 0$ ,  $a > 0$  und  $b \in (0, 1)$ , so gilt:

$$f_j(\alpha) = -\left[\left(\frac{\ln \alpha}{a} \vee -(j+1)^b\right) + (j+1)^b\right]^{\frac{1}{b}} \text{ und}$$

$$\mathcal{L}[(h(j)^{-1} M_{f_j(\alpha)}^j)_{\alpha \in [0,1]}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(B(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}].$$

Die Höhe der Cluster wächst in diesem Fall exponentiell und damit sehr viel schneller als in den beiden obigen Beispielen. Die Größe der Cluster wächst auch exponentiell und im Grenzfall  $j \rightarrow \infty$  unabhängig von  $\alpha$ . Man beachte, dass sich das System für  $b = 1$  bereits im Bereich des Macro-Clusters befindet.

Auch in den vorangehenden Arbeiten konnte gezeigt werden, dass für diesen Bereich der Wechselwirkungsterme diffusives Clustern vorliegt, und auch die Unterscheidung in große, mittlere und kleine Cluster wurde unverändert aus [DG2, DG3] und [Kle] übernommen. Die einzigen Unterschiede treten definitionsbereichsbedingt bei der mittleren Höhe der Cluster sowie bei der Form des Diffusionsprozesses auf, den man als Grenzprozess der reskalierten Markov-Kette erhält:

Zustandsraum	Clusterhöhe	Grenzprozess
$[0, 1]$	In erster Näherung 1. Für den Fall großer bzw. kleiner Cluster lassen sich Korrekturterme berechnen (vgl. [DG2]).	Fisher-Wright Diffusion auf $[0, 1]$ mit Zeitskala $\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ .
$\mathbb{R}_+$	$a \sum_{k=0}^j c_k^{-1}$ für $g(x) = ax$ .	Lamperti-Ney Diffusion mit Generator $G(\alpha) = 2x \left(\frac{1-\alpha}{\exp\{\frac{x}{1-\alpha}\} - 1}\right) \frac{\partial}{\partial x} + 2x \left(1 + \frac{1-\alpha}{\exp\{\frac{x}{1-\alpha}\} - 1}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .
$\mathbb{R}$	$\sigma \left(\sum_{k=0}^j c_k^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ für $g(x) = \sigma^2 x$ .	Standard-Brownsche-Bewegung auf $[0, 1]$ .

**Bereich (ii): Macro-Clustern**

Dieser Fall lässt sich sinnvoll nur für Wechselwirkungsketten der Form  $c_k = c \exp\{-ak\}$  mit  $a, c > 0$  beschreiben. Wie wir im Beweis des Theorems 1.9 sehen werden, ist die Lindeberg-Bedingung für Wechselwirkungsterme in diesem Bereich nicht erfüllt. Wir können also nicht erwarten, dass es möglich ist die Markov-Kette so zu skalieren, dass sie in Verteilung gegen eine Brownsche-Bewegung konvergiert. Skalieren wir daher wieder wie im Fall (i) des diffusiven Clusters die Markov-Kette mit dem Kehrwert von

$$h(j) := \sigma \left(\sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{Var}[M_0^j]},$$

so wird es auch hier einen nichttrivialen Grenzprozess, die Markov-Kette  $(\widetilde{M}_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ , geben, gegen den die reskalierte Markov-Kette konvergiert. Dabei wird vor allem verwendet, dass im Bereich des Macro-Clusters nach Voraussetzung

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{Var}[\sqrt{c_j} M_0^j] = \sigma^2 \lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} \begin{cases} < \infty & \text{und} \\ \geq \sigma^2 > 0 \end{cases}$$

gilt, um zeigen zu können, dass die Übergangskerne der Markov-Kette  $(\widetilde{M}_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  wohldefiniert sind. Allerdings wird das nicht wie in Theorem 1.8(i) über ein geeignetes Entrance Law möglich sein, sondern man wird die Zeitvariable der reskalierten Markov-Kette so verschieben müssen, dass sie zu einem festen Zeitpunkt (z.B. 0) startet.

**1.13 THEOREM.** (Macro-Clustern)

Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  eine Markov-Kette definiert durch (1.1–1.2) und (1.5) mit  $g \equiv \sigma^2$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$ . Sei

außerdem  $c_k = c \exp\{-ak\}$  mit  $a, c > 0$ , dann gilt  $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k^{-1} = \infty$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j c_k^{-1} < \infty$ .  
Setzt man

$$h(j) := \sigma \left( \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{c}} \left( \frac{e^{aj} - 1}{e^a - 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

so gilt, dass die mit  $h(j)^{-1}$  skalierte Markov-Kette  $j$ -ter Stufe schwach in Verteilung gegen eine quadratintegrale Markov-Kette  $(\widetilde{M}_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  konvergiert:

$$\mathcal{L}[(h(j)^{-1} M_{k-j-1}^j)_{k=0, \dots, j+1}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(\widetilde{M}_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}].$$

$(\widetilde{M}_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_-}$  ist dabei definiert durch

$$\widetilde{M}_0^\infty := 0 \quad \text{und Übergangskern} \quad \widetilde{K}_k(x, A) := \Gamma_x^{\tilde{c}_k, \sigma^2}(A) \quad (k \in \mathbb{Z}_+, A \in \mathfrak{B}),$$

wobei die Wechselwirkungsterme des Grenzprozesses  $(\tilde{c}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  definiert sind durch

$$\tilde{c}_k := \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j-k} h(j)^2 = \sigma^2 \frac{e^{ak}}{e^a - 1}.$$

Weiterhin existiert f.s. der Grenzwert  $\widetilde{M}_\infty^\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{M}_k^\infty$  und ist f.s. endlich.

Durch eine ähnliche heuristische Überlegung, wie wir sie schon im Fall des diffusiven Clusters angestellt haben, ergibt sich genauso wie dort für die mittlere Clusterhöhe  $h(j)$ .

Für die typische räumliche Größe der Cluster überlegen wir uns Folgendes: Die Markov-Kette  $(h(j)^{-1} M_{k-j-1}^j)_{k=0, \dots, j+1}$  beschreibt das Verhalten eines empirischen Mittels von Blöcken der Größe  $N^{j+1-k}$  asymptotisch für  $N \rightarrow \infty$ . Bei einer Verkleinerung der Blockgröße von  $N^{j+1-k}$  auf  $N^{j+1-(k+1)}$  ist die Änderung des Zustands des Blockmittels asymptotisch  $N(\widetilde{M}_k^\infty, \sigma^2/\tilde{c}_k)$ -verteilt. Die reskalierten Zustände der Blockmittel vollziehen also bei der schrittweisen Verkleinerung der Blockgröße eine Irrfahrt mit normalverteilten Übergangskernen und bleiben auch für  $k \rightarrow \infty$  f.s. endlich.

Man versucht nun ähnlich wie im Bereich (i) des diffusiven Clusters eine Funktion  $f(j)$  zu finden, die in der Zeitskala  $N^j$  asymptotisch angibt, in welchem Blockmittel  $M_{f(j)}^j$  alle Teilchen positive bzw. negative Werte annehmen. Für eine solche Funktion müsste dann aber bei der Verkleinerung der Blockgröße um 1 gelten, dass asymptotisch für  $j \rightarrow \infty$   $h(j)^{-1} M_{f(j)+1}^j$  positives Vorzeichen hat, wenn  $h(j)^{-1} M_{f(j)}^j$  positives Vorzeichen hat und analog für negatives Vorzeichen. Da aber

$$\mathcal{L}[h(j)^{-1} M_{f(j)}^j - \widetilde{M}_{f(j)+1}^\infty] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

gilt, wird dies nach obiger Überlegung über die Übergangskerne der Markov-Kette  $(\widetilde{M}_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  nur für Funktionen  $f(j)$  möglich sein, die  $f(j) + j + 1 \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$  erfüllen (man beachte dabei:  $-j - 1 \leq f(j) \leq 0$ ). Für  $f(j)$  kommen somit Funktionen in Frage, die sich asymptotisch für  $j \rightarrow \infty$  wie  $-\alpha j$  mit  $\alpha \in [0, 1)$  verhalten. Somit wachsen also *alle* Cluster in der Größenordnung  $\alpha j$  für beliebiges  $\alpha \in [0, 1)$ .

Insbesondere gilt für alle  $\epsilon > 0$  im Grenzfall  $j \rightarrow \infty$  ähnlich wie im Fall der großen Cluster beim diffusiven Clustern  $f(j)/j \rightarrow -(1 - \epsilon)$ , d.h. die Cluster wachsen fast mit maximaler Geschwindigkeit. Im Unterschied zum diffusiven Clustern wachsen aber alle Cluster in der selben Größenordnung.

Das Verhalten der Systeme hängt in diesem Bereich der extrem schwach interagierenden Hierarchien sehr von dem zugrundeliegenden Definitionsbereich der Diffusionen ab. Ausschlaggebend ist vor allem das Verhalten der Diffusionen an den Randpunkten des Definitionsbereichs: Im Fall  $[0, 1]$  und  $\mathbb{R}$  hat die Diffusion an den Rändern jeweils gleiches Verhalten, im Fall  $\mathbb{R}_+$  unterscheidet sich jedoch das Verhalten der Diffusion in 0 von dem in  $\infty$ . Daher ähnelt das Verhalten des Systems auf  $\mathbb{R}$  eher dem des Systems auf  $[0, 1]$ . Diese Ähnlichkeit wollen wir im Folgenden genauer untersuchen. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter einem *selbstähnlichen* System verstehen wollen:

#### 1.14 DEFINITION. (Selbstähnlichkeit)

(i) Das System heißt *selbstähnlich*, wenn für die zugehörige Wechselwirkungskette für alle  $j \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \{-j - 1, \dots, 0\}$  und  $l \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathcal{L}[M_{k-l}^{j+l}] = \mathcal{L}[M_k^j].$$

(ii) Das System heißt *im Einzugsbereich der Selbstähnlichkeit*, wenn die Wechselwirkungskette für alle  $j \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{-j - 1, \dots, 0\}$

$$\mathcal{L}[M_{k-l}^{j+l}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\widetilde{M}_k^j]$$

erfüllt, wobei  $(\widetilde{M}_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  die Wechselwirkungskette eines geeignet gewählten selbstähnlichen Systems ist.

Anschaulich bedeutet die Selbstähnlichkeit des Systems, dass sich die Verteilung der Cluster in allen Skalen ähnelt: Vergrößert man sowohl die Zeit- als auch die Raumskala um  $l \in \mathbb{N}$ , so bleibt die Verteilung der Wechselwirkungskette dadurch invariant. Die Selbstähnlichkeit beschreibt somit das Verhalten des Systems für endliche Zeitskalen  $j$ .

Offensichtlich ist die Selbstähnlichkeit des Systems äquivalent dazu, dass die Übergangskerne  $(\Gamma_{\theta}^{c_k;g})_{k \in \mathbb{Z}_+}$  unabhängig von  $k$  sind ( $g$  ist dabei die Fixform bzw. der Fixpunkt der Abbildung  $F_c$ ). Dies erfüllt aber für Systeme auf  $\mathbb{R}$  nur die konstante Folge der Wechselwirkungsterme  $c_k \equiv c > 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Ein System mit einer Folge von Wechselwirkungstermen diesen Typs befindet sich aber im Bereich des diffusiven Clusters mit mittleren Clustergrößen. Für Systeme auf  $[0, 1]$  haben diese Folgen aufgrund der Fixformeneigenschaft der Funktion  $g(x) = x(1 - x)$  die Gestalt

$$c_k = c_0 \left( \frac{c_0}{1+c_0} \right)^k$$

und befinden sich somit in einem Bereich, der dem Macro-Clustern entspricht. Weiterhin haben Dawson und Greven gezeigt (siehe [DG2, Theorem 4]), dass sich Systeme auf  $[0, 1]$  mit Wechselwirkungstermen der Form  $c_k = c_0 p^k b_k$  mit  $p \in (0, 1)$  und  $b_{k+1}/b_k \rightarrow 1$  im Einzugsbereich der Selbstähnlichkeit befinden.

Neben dieser Eigenschaft der Selbstähnlichkeit erfüllt das System auf  $[0, 1]$  natürlich auch Eigenschaften ähnlich denen des Theorems 1.13, nur dass es für dieses System nicht nötig ist die Markov-Kette mit dem Inversen der Höhe der Cluster  $h(j)$  zu skalieren (siehe [Kle, Theorem 2]). Die Cluster wachsen auch hier mit maximaler Geschwindigkeit; die Wahrscheinlichkeit, dass man sich bei zufälliger Ortswahl in einem Cluster mit Einsen bzw. Nullen befindet hängt aber im Gegensatz zum System auf  $\mathbb{R}$  vom Startwert  $\theta$  ab.

Man könnte vermuten, dass das Verhalten des Systems bei extrem schwach interagierenden Hierarchien mehr von den topologischen Eigenschaften des Definitionsbereichs der Diffusionen abhängt. Tatsächlich macht sich jedoch die Beschränktheit (im Fall  $[0, 1]$ ) bzw. Unbeschränktheit (in den Fällen  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}$ ) hauptsächlich dadurch bemerkbar, dass man die Markov-Kette im ersten Fall nicht räumlich skalieren braucht, um eine nichttriviale Konvergenz zu erhalten, in den beiden anderen Fällen jedoch schon.

In der folgenden Tabelle sind die bisher untersuchten Fälle gegenübergestellt:

Zustandsraum	Verhalten des Systems
$[0, 1]$	Die Cluster wachsen ähnlich wie beim Macro-Clustern alle mit maximaler Geschwindigkeit. Zusätzlich befindet sich das System im Einzugsbereich der <i>Selbstähnlichkeit</i> . Als Grenzverteilung ergibt sich ähnlich wie hier eine Markov-Kette jedoch mit <i>zeitinhomogenen</i> Übergangskernen (vgl. [DG2, Theorem 4] und [Kle, Theorem 2]).
$\mathbb{R}_+$	<i>Konzentriertes Clustern</i> (auf engl.: concentrated clustering): Die Anzahl der Teilchen, deren Zustand mit maximaler Rate wächst, verschwindet asymptotisch (sie werden in der 0 „gefangen“), diese Teilchen vereinigen aber asymptotisch die gesamte Masse auf sich (vgl. [DG3, Theorem 6]).
$\mathbb{R}$	<i>Macro-Clustern</i> : Die Bereiche, in denen die Zustände der Teilchen gleiches Vorzeichen haben wachsen für $t \rightarrow \infty$ fast mit maximaler Geschwindigkeit: Im Grenzfall großer Systeme $N \rightarrow \infty$ gilt für die Zeitskala $N^j$ für große $j$ und beliebig kleines $\epsilon > 0$ : $N^{-f(j)} \sim N^{j(1-\epsilon)},$ wobei $-f(j)$ die mittlere Clustergröße zur Zeit $N^j$ angibt. Die Clusterhöhe wächst dabei exponentiell.

# Kapitel 2

## Eigenschaften der stochastischen Differentialgleichung

In diesem Kapitel finden sich die Beweise für Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (1.4), der Existenz und Eindeutigkeit der Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  sowie die Berechnung ihres ersten und zweiten Moments.

### 2.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

Für den Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen zitieren wir folgendes Theorem (vgl. [KS, Korollar 5.5.16 und Bemerkung 5.5.19]):

**2.1 THEOREM.** Sei  $(B(t))_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung auf  $\mathbb{R}$ . Erfüllen die Koeffizienten  $b(x)$  und  $\sigma(x)$  der stochastischen Differentialgleichung

$$(2.1) \quad dX(t) = b(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dB(t)$$

die Bedingungen

(i)  $b(x)$  und  $\sigma(x)$  sind Borel-messbar

(ii)  $b(x)$  und  $\sigma(x)$  wachsen höchstens linear in  $x$ , d.h.

$$\exists K > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : |b(x)| + |\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$$

(iii)  $b(x)$  ist Lipschitz-stetig, d.h.

$$\exists L > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : |b(x) - b(y)| \leq L|x - y|$$

(iv) es existiert eine strikt monoton wachsende Funktion  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $h(0) = 0$  und für alle  $\epsilon > 0$

$$\int_0^\epsilon h^{-2}(\xi) d\xi = \infty, \text{ so dass gilt:}$$

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq h(|x - y|),$$

dann existiert eine eindeutige starke Lösung von (2.1).

Unter Verwendung dieses Theorems zeigen wir, dass die stochastische Differentialgleichung (1.4) eindeutig bestimmte, starke Lösungen besitzt. Dazu setzen wir  $b(x) = c_k(\theta - x)$  und  $\sigma(x) = \sqrt{2g_k(x)}$ , wobei  $c_k > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $g_k \in \mathfrak{G}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Da die  $g_k$  nur lokal Lipschitz-stetig sind, lässt sich die Eindeutigkeit der Lösungen nur für Zeitpunkte  $0 \leq t \leq S_n$  zeigen, wobei die Stoppzeit  $S_n$  der erste Zeitpunkt ist, an dem der Prozess  $X_k(t)$  das Intervall  $[-n, n]$  verlässt:

$$S_n := \inf\{t \geq 0 : (X_k(t) \geq n) \vee (X_k(t) \leq -n)\}$$

(i) Borel-Messbarkeit:

$b$  ist offensichtlich Borel-messbar. Da  $g_k$  nach Lemma 1.3 und Definition 1.1(ii) Lipschitz-stetig ist und damit für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow y} |(g_k(x) - g_k(y))| \leq \limsup_{x \rightarrow y} L|x - y| = 0,$$

und somit  $g_k$  stetig ist, sowie  $\sqrt{x}$  eine stetige Funktion ist, folgt, dass auch  $\sigma$  als Verknüpfung zweier stetiger Funktionen stetig und somit auch Borel-messbar ist.

(ii) höchstens lineares Wachstum:

Wählt man  $K_1 = c_k$  für  $|\theta| \leq 1$  bzw.  $K_1 = |c_k \cdot \theta|$  für  $|\theta| > 1$ , so gilt offensichtlich  $|c_k(\theta - x)| \leq K_1(1 + |x|)$ .

Nach Lemma 1.3 und Definition 1.1(i) gibt es für alle  $k$  ein  $C_1 \in [0, 1)$  und ein  $C_2 > 0$  mit  $g_k(x) \leq C_1 x^2 + C_2$  für alle  $x$ . Durch Addition von  $2\sqrt{C_1 C_2}|x|$  auf der rechten Seite der Ungleichung ergibt sich  $g_k(x) \leq C_1|x|^2 + 2\sqrt{C_1 C_2}|x| + C_2 = (C_1|x| + C_2)^2 \leq C^2(1 + |x|)^2$  mit  $C := \max\{C_1, C_2\}$ . Multipliziert man beide Seiten mit 2 und zieht danach die Wurzel, so ergibt sich mit  $K_2 = \sqrt{2}C$ :  $\sqrt{2}g_k(x) \leq K_2(1 + |x|)$ .

Setzt man  $K = K_1 + K_2$  so folgt Bedingung (ii).

(iii) Lipschitz-Stetigkeit von  $b(x)$ :

$|c_k(\theta - x) - c_k(\theta - y)| = c_k|x - y|$ . Bedingung (iii) ist somit mit  $L = c_k$  erfüllt.

(iv) Hölder-Stetigkeit von  $\sigma(x)$ :

Die Funktion  $h_a(\xi) := \sqrt{a\xi}$  mit  $a > 0$  erfüllt die Bedingungen an  $h$  in (iii), da  $\sqrt{a\xi}$  eine nichtnegative Funktion ist, die strikt monoton wachsend ist, und für die für beliebiges  $\epsilon > 0$  gilt:  $\int_0^\epsilon (\sqrt{a\xi})^{-2} d\xi = a^{-1} \int_0^\epsilon \xi^{-1} d\xi = \infty$ . Es genügt also zu zeigen, dass  $\sigma$  Hölder-stetig mit Exponent  $\frac{1}{2}$  ist.

Nach Lemma 1.3 und Definition 1.1 gibt es für alle  $k$  ein  $L > 0$ , so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ . Sei zunächst  $g_k(x) > g_k(y)$ . Dann gilt  $|2g_k(x) - 2g_k(y)| = 2g_k(x) - 2g_k(y) = 2g_k(x) - 4g_k(y) + 2g_k(y) \geq 2g_k(x) - 2\sqrt{2g_k(x)2g_k(y)} + 2g_k(y) = |\sqrt{2g_k(x)} - \sqrt{2g_k(y)}|^2$ . Für  $g_k(x) < g_k(y)$  lässt sich dieselbe Ungleichung analog zeigen.

Daraus folgt, dass  $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \sqrt{2L|x - y|} = h_{2L}(|x - y|)$  für ein  $L > 0$ , und somit ist Bedingung (iv) erfüllt.

Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (1.4) für  $0 \leq t \leq S_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  aus dem oben zitierten Theorem. Da aber aus der Bedingung für höchstens lineares Wachstum nach [KS, Bemerkung 5.5.19] schon  $S_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, folgt die Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen auf ganz  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Invariante Maße des Prozesses

In diesem Abschnitt werden zunächst die für den späteren Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit invarianter Maße der Differentialgleichung (1.4) verwendeten Definitionen und Sätze zusammengefasst. In Abschnitt 2.2.2 konstruieren wir nach einem Verfahren von S. Karlin und H. Taylor (siehe [KT, 15.5]) ein invariantes Maß  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  obiger stochastischer Differentialgleichung und zeigen in Abschnitt 2.2.3, dass dieses eindeutig bestimmt ist. Für das erste und zweite Moment der Markov-Kette ist außerdem die Kenntnis des ersten und zweiten Moments der Gleichgewichtsverteilung wichtig, die wir in Abschnitt 2.2.4 berechnen.

### 2.2.1 Definitionen und Sätze

Bei den folgenden Definitionen und Sätzen zitieren wir größtenteils [Lig], der in der Einleitung seines Buches eine übersichtliche Zusammenfassung der hier verwendeten Begriffe gibt. Zunächst sei aber definiert, was wir unter einem *Diffusionsprozess* verstehen wollen. Um dem Leser die Unterscheidung der starken Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.4) mit beliebigen stochastischen Prozessen zu erleichtern, wollen wir für die Letzteren den Buchstaben  $Y$  verwenden, der jedoch nicht mit den in Abschnitt 1.2 definierten Prozessen zusammenhängt.

**2.2 DEFINITION.** Ein Prozess  $(Y(t))_{t \geq 0}$  heißt *Diffusionsprozess*, wenn gilt:

- (i)  $(Y(t))_{t \geq 0}$  hat f.s. stetige Pfade
- (ii)  $(Y(t))_{t \geq 0}$  hat die Markov-Eigenschaft
- (iii)  $(Y(t))_{t \geq 0}$  verhält sich lokal wie eine Brownsche-Bewegung mit zustandsabhängigen Drift- und Diffusionskoeffizienten, d.h. es gilt für alle  $t \geq 0$  und  $\epsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \mathbf{P}(|Y(t+h) - Y(t)| > \epsilon \mid Y(t) = x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ & \frac{1}{h} \mathbf{E}[(Y(t+h) - Y(t)) \mathbf{1}_{\{|Y(t+h) - Y(t)| \leq \epsilon\}} \mid Y(t) = x] \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mu(x) \quad \text{„lokale Drift“} \\ & \frac{1}{h} \mathbf{E}[(Y(t+h) - Y(t))^2 \mathbf{1}_{\{|Y(t+h) - Y(t)| \leq \epsilon\}} \mid Y(t) = x] \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sigma^2(x) \quad \text{„lokale Diffusion“} \end{aligned}$$

Da  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  die eindeutig bestimmte, starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.4) ist, deren Koeffizienten  $c_k(\theta - x)$  und  $\sqrt{g_k(x)}$  insbesondere zeitunabhängig sind, folgt die fast sichere Stetigkeit der Pfade und die Markov-Eigenschaft des Prozesses (vgl. [Øks, Theorem 3.13] und [Øks, Theorem 7.2]). Der Punkt (iii) läßt sich für  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  mit der Itô-Formel zeigen. Somit haben wir gezeigt, dass  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  ein Diffusionsprozess ist.

Als Hilfsmittel zur Definition und Berechnung der (zeit-)invarianten Maße eines Diffusionsprozesses bedient man sich der zu einem Markov-Prozess gehörigen *Halbgruppe*, die die zeitliche Entwicklung des Prozesses beschreibt. Man definiert also:

**2.3 DEFINITION.** Sei  $(Y(t))_{t \geq 0}$  ein Markov-Prozess mit Werten in  $\mathbb{R}$  auf dem Messraum  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ . Dann ist die zu  $(Y(t))_{t \geq 0}$  gehörige *Halbgruppe*  $U(t)$  definiert durch

$$(U(t)f)(x) := \mathbf{E}_x[f(Y(t))],$$

wobei  $f$  aus dem Definitionsbereich der Halbgruppe  $L^\infty := \bigcap_{x \in \mathbb{R}} L^\infty(\mathbf{P}_x) \supseteq C_b(\mathbb{R})$  beliebig gewählt ist.

Im Weiteren bezeichnen wir mit  $(U_k(t))_{t \geq 0}$  die zu  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  gehörige Halbgruppe. Es genügt im Allgemeinen statt Funktionen aus  $L^\infty$  nur solche aus  $C_b(\mathbb{R})$  zu betrachten, da  $C_b(\mathbb{R})$  eine in  $L^\infty$  dicht liegende Teilmenge ist.

Die Menge aller invarianten Maße eines Markov-Prozesses ist dann definiert durch:

**2.4 DEFINITION.** Sei  $(Y(t))_{t \geq 0}$  ein Markov-Prozess mit Werten in  $\mathbb{R}$  auf dem Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  mit Halbgruppe  $(U(t))_{t \geq 0}$ ,  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  und  $f \in C_b(\mathbb{R})$  eine beschränkte stetige Funktion.

(i) Die Verteilung des Prozesses  $Y(t)$  mit Startverteilung  $\mu$  ist gegeben durch

$$\mathbf{E}^\mu[f(Y(t))] := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}_x[f(Y(t))] \mu(dx)$$

(ii) Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu U(t)$  ist definiert durch

$$\int f d(\mu U(t)) := \int U(t)f d\mu$$

(iii) Die Menge  $\mathfrak{I}$  aller *invarianten Maße* eines Markov-Prozesses ist definiert durch

$$\mathfrak{I} = \{\mu \in \mathfrak{M}_1 : \mu U(t) = \mu \quad \forall t \geq 0\}$$

Im Weiteren bezeichnen wir mit  $\mathfrak{I}_k$  die invarianten Maße des Prozesses  $(X_k(t))_{t \geq 0}$ . Durch den folgenden Satz werden die invarianten Maße eines stochastischen Prozesses charakterisiert (vgl. [Lig, Proposition 1.8]). Er folgt direkt aus den Definitionen 2.4(ii) und (iii):

**2.5 SATZ.** (Invariante Maße)

Sei  $(Y(t))_{t \geq 0}$  ein Markov-Prozess mit Werten in  $\mathbb{R}$  und  $(U(t))_{t \geq 0}$  die dazugehörige Halbgruppe. Genau dann ist  $\mu \in \mathfrak{I}$ , wenn für beliebige  $f \in C_b(\mathbb{R})$  und  $t \geq 0$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} U(t)f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

Die Berechnung eines zum Lebesgue-Maß absolutstetigen, invarianten Maßes, wie es ja  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  ist, stützt sich entscheidend auf den folgenden Satz (vgl. [Dyn1, Theorem 5.10]):

**2.6 SATZ.** (Kolmogorov's Backward-Equation)

Sei  $(Y(t))_{t \geq 0}$  ein Diffusionsprozess im Sinne von Dynkin auf  $\mathbb{R}$ , dessen Drift- und Diffusionskoeffizienten  $\mu$  und  $\sigma$  lokal Hölder-stetig mit Exponenten  $\alpha > 0$  sind, und sei  $(U(t))_{t \geq 0}$  die zu  $Y$  gehörige Halbgruppe.

Für beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$  ist dann die Funktion  $u(t, x) := (U(t)f)(x)$  stückweise stetig in  $x$ , einmal bzw. zweimal stetig partiell differenzierbar nach  $t$  bzw.  $x$ , und erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$(2.2) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mu(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

mit Anfangsbedingung ( $\|\cdot\|$  ist die Supremumsnorm)

$$(2.2a) \quad \lim_{t \downarrow 0} \|u(t, x) - f(x)\| = 0.$$

Dynkin nennt einen Markov-Prozess  $(Y(t))_{t \geq 0}$  einen Diffusionsprozess, wenn der Definitionsbereich des *infinitesimalen Generators* des Prozesses, der definiert ist als

$$(Gf)(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{E}_x[f(Y(h)) - f(Y(0))],$$

die zweimal stetig differenzierbaren beschränkten Funktionen  $f \in C_b^2(\mathbb{R})$  umfasst. Für Diffusionsprozesse in unserem Sinne gilt aber insbesondere, dass sich der infinitesimale Generator für  $f \in C_b^2(\mathbb{R})$  schreiben lässt als

$$(Gf)(x) = \left( \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (f)(x)$$

(man entwickle  $f$  bis zum 2. Glied in eine Taylorreihe und wende Definition 2.2(iii) an). Wie wir schon oben gesehen haben, ist  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  ein Diffusionsprozess und die Koeffizienten der stochastischen Differentialgleichung, deren eindeutige, starke Lösung er ist, sind lokal Hölder-stetig mit Exponent 1 bzw.  $\frac{1}{2}$ . Somit erfüllt  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  die Voraussetzungen für Satz 2.6.

Es sei angemerkt, dass auch die entsprechende partielle Differentialgleichung mit der Dichte des Übergangskerns des Diffusionsprozesses bzgl. des Lebesgue-Maßes an Stelle der Halbgruppe als Kolmogorov's Backward-Equation bezeichnet wird.

### 2.2.2 Beweis der Existenz

Wir berechnen in diesem Abschnitt ein zum Lebesgue-Maß absolutstetiges invariantes Maß des Prozesses  $(X_k(t))_{t \geq 0}$  unter Zuhilfenahme der oben formulierten Sätze für Diffusionsfunktionen  $g \in \mathfrak{G}_*$ . Sei also  $\gamma(x) := \gamma_\theta^{c_k, g_k}(x)$  die Dichte von  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  bzgl. des Lebesgue-Maßes  $\lambda$ . Dabei sei o.B.d.A. angenommen, dass  $g_k \in C^2(\mathbb{R})$  (bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz liegt  $C^2(\mathbb{R})$  dicht im Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  – einer Teilmenge von  $C(\mathbb{R})$  – auch unter den zusätzlichen Bedingungen des höchstens quadratischen Wachstums und der Positivität der Funktionen). Außerdem existiere das erste und zweite Moment von  $\gamma\lambda$ , d.h.

$$(2.3) \quad \int_{\mathbb{R}} |x| \gamma(x) \lambda(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 \gamma(x) \lambda(dx) < \infty.$$

Diese Voraussetzung garantiert, dass auch das erste und zweite Moment des Diffusionsprozesses  $(X_k(t))_{t \geq 0}$ , der in der Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  startet, für alle  $t \geq 0$  endlich ist:

**2.7 KOROLLAR.** *Gilt (2.3) für die Gleichgewichtsverteilung des Diffusionsprozesses  $(X_k(t))_{t \geq 0}$ , so gilt auch*

$$\mathbf{E}^{\gamma\lambda}[|X_k(t)|] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{E}^{\gamma\lambda}[X_k(t)^2] < \infty$$

für alle  $t \geq 0$ .

*Beweis.* Da mit der Jensen-Ungleichung  $\mathbf{E}[|X|^2] \leq \mathbf{E}[X^2]$  gilt, genügt es die Behauptung für das zweite Moment zu zeigen:  $f(x) := x^2$  liegt nach Voraussetzung in  $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\gamma\lambda)$ . Wählt man  $f_n(x) := x^2 \wedge n$ , so ist  $f_n \in C_b(\mathbb{R})$  und es gilt  $f_n \uparrow f$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für  $f_n$  gilt jedoch für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \geq 0$  nach Voraussetzung und Satz 2.5:

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} f_n(x) (\gamma\lambda)(dx) = \int_{\mathbb{R}} (U_k(t) f_n)(x) (\gamma\lambda)(dx) = \mathbf{E}^{\gamma\lambda}[f_n(X_k(t))].$$

Daraus folgt die Behauptung mit dem „Satz der monotonen Konvergenz“. □

Nach Satz 2.5 ist die Menge der invarianten Maße  $\mathfrak{I}_k$  charakterisiert durch die Eigenschaft, dass für beliebige  $f \in C_b(\mathbb{R})$  gilt:

$$(2.4) \quad \int_{\mathbb{R}} U_k(t) f \cdot \gamma d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \gamma d\lambda$$

**2.8 LEMMA.** *Gilt Gleichung (2.4) für Funktionen  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ , so auch für Funktionen  $f \in C_b(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C_c^2(\mathbb{R})$ , für die gilt:

- (i)  $f_n \rightarrow f$  punktweise für  $n \rightarrow \infty$  und

(ii) für  $m, M \in \mathbb{R}$  mit  $m \leq f(x) \leq M$  gilt auch für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $m \leq f_n(x) \leq M$ , dann gilt mit majorisierter Konvergenz und der Isotonie der Halbgruppe:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} U_k(t) f_n \cdot \gamma d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x[f_n(X_k(t))] \cdot \gamma d\lambda = \int_{\mathbb{R}} U_k(t) f \cdot \gamma d\lambda \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \cdot \gamma d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} f \cdot \gamma d\lambda. \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge ist definiert durch:  $f_n|_{\mathbb{R} \setminus (-n, n)} := 0$ . Das Intervall  $[-n, n]$  wird in  $2^n$  gleichgroße Teilintervalle zerlegt, auf denen die Funktion  $f_n$  die Punkte  $(-n | 0)$ ,  $(-n + j \cdot 2n \cdot 2^{-n} | f(-n + j \cdot 2n \cdot 2^{-n}))$  mit  $j = 1, \dots, 2^n - 1$  und  $(n | 0)$  durch  $2^n$  Polynome vom Grad 5 interpoliert, so dass deren erste und zweite Ableitung auf den Rändern der Intervalle jeweils 0 sind. Diese Funktionen sind zweimal stetig differenzierbar, haben einen kompakten Träger, der gegen  $\mathbb{R}$  aufsteigt, und erfüllen offensichtlich (i) und (ii).  $\square$

Es sei also im Folgenden  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$  beliebig gewählt.

Wir wollen nun versuchen Satz 2.6 auf Gleichung (2.4) anzuwenden. Dazu differenzieren wir beide Seiten partiell nach  $t$ . Da die rechte Seite nicht von  $t$  abhängt, wird sie zu Null. Damit wir auf der linken Seite Integration und Differentiation vertauschen können, müssen wir zunächst zeigen, dass  $\frac{\partial}{\partial t} U_k(t) f$  für  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$  integrierbar ist. Um dies zeigen zu können, benötigen wir zunächst das

**2.9 LEMMA.** Für die eindeutige, starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.4) mit Startverteilung  $\mathcal{L}[X_k(0)] = \delta_x$  gilt für beliebige  $n \in \mathbb{Z}$  und  $t \geq 0$ :

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x(X_k(t) \leq n) = 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{P}_x(X_k(t) \geq n) = 0.$$

*Beweis.* Wir wollen die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{P}_x(X_k(t) \leq n)$  für festes  $n \in \mathbb{Z}$  mit Hilfe der Tschebischov-Ungleichung abschätzen (analog  $\mathbf{P}_x(X_k(t) \geq n)$ ). Ist  $x$  so groß gewählt, dass  $\mathbf{E}[X_k(t)] > n$ , dann ist

$$(2.5) \quad \mathbf{P}_x(X_k(t) \leq n) \leq \mathbf{P}_x(|X_k(t) - \mathbf{E}_x[X_k(t)]| > \mathbf{E}_x[X_k(t)] - n) \leq \frac{\text{Var}[X_k(t)]}{(\mathbf{E}_x[X_k(t)] - n)^2}.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass der Bruch auf der rechten Seite für  $x \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert.

Wie man leicht aus der stochastischen Differentialgleichung (1.4) erkennt, erfüllt das erste Moment die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}_x[X_k(t)]}{dt} &= c_k(\theta - \mathbf{E}_x[X_k(t)]), \\ \mathbf{E}_x[X_k(0)] &= x, \end{aligned}$$

die als Lösung hat:

$$(2.6) \quad \mathbf{E}_x[X_k(t)] = e^{-c_k t} x + c_k \theta.$$

Eine Abschätzung für das zweite Moment erhält man aus (1.4) mit der Itô-Formel, dem ersten Moment und der Abschätzung

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \epsilon x^2 + b,$$

die aus der Lipschitz-Stetigkeit von  $g$  und der Eigenschaft  $g = o(x^2)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  folgt. Demnach erfüllt das zweite Moment die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung (dabei ist o.B.d.A.  $\epsilon < \frac{1}{2}$  gewählt)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}_x[X_k(t)^2]}{dt} &\leq c_k(x\theta e^{-c_k t} + c_k \theta^2 + b + (\epsilon - 1)\mathbf{E}_x[X_k(t)^2]) \\ \mathbf{E}_x[X_k(0)^2] &= x^2, \end{aligned}$$

die als Lösung hat:

$$(2.7) \quad \mathbf{E}_x[X_k(t)^2] \leq e^{2(\epsilon-1)c_k t} x^2 + \frac{1 - e^{-c_k t}}{2\epsilon - 1} 2\theta x + \frac{e^{2(\epsilon-1)c_k t} - 1}{\epsilon - 1} (b + c_k \theta^2)$$

Setzt man (2.6) und (2.7) in die Ungleichung (2.5) ein und lässt  $x \rightarrow \infty$  gehen, dann ergibt sich

$$\mathbf{P}_x(X_k(t) \leq n) \leq e^{2\epsilon c_k t} - 1,$$

woraus die Behauptung für  $\epsilon \downarrow 0$  folgt.  $\square$

Damit können wir nun zeigen

**2.10 LEMMA.** *Ist  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ , so gilt für die Halbgruppe  $u(t, x) := (U_k(t)f)_{t \geq 0}$  der Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.4):*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0.$$

Nach Satz 2.6 existiert die erste und zweite partielle Ableitung von  $u(t, x)$  nach  $x$  und ist stetig. Daher gilt für  $j \in \{1, 2\}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial x^j} = 0.$$

Insbesondere folgt daraus, dass auch die erste und zweite partielle Ableitung von  $u(t, x)$  nach  $x$  beschränkt ist.

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein  $M > 0$  mit  $|f| \leq M$  und eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}$  mit  $f|_{\mathbb{R} \setminus K} \equiv 0$  sowie ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $K \subset [-n, n]$ . Zerlegt man  $f$  in Positiv- und Negativteil, so gilt mit Lemma 2.9:

$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x[f^+(X_k(t))] \leq M \limsup_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x(X_k(t) \in K) \leq M \limsup_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x(X_k(t) \leq n) = 0$$

Analog beweist man die Fälle für  $f^+$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $f^-$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Da nach Satz 2.6  $u(t, x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  stetig partiell nach  $x$  differenzierbar ist, lässt sich der Mittelwertsatz anwenden: Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig, dann existiert ein  $\xi \in (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ , so dass gilt:

$$\frac{\partial u(t, \xi)}{\partial \xi} = u(t, x + \frac{1}{2}) - u(t, x - \frac{1}{2}).$$

Da aber für  $x \rightarrow \pm\infty$  die rechte Seite verschwindet, gilt insbesondere

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0.$$

Da  $\frac{\partial}{\partial x} u(t, x)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig ist, muss es somit beschränkt sein. Analog folgert man dies auch für die zweite partielle Ableitung.  $\square$

Mit Lemma 2.10 folgt somit, dass  $\frac{\partial}{\partial x}(U_k(t)f)(x)$  und  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(U_k(t)f)(x)$  beschränkt sind. Weiterhin wissen wir, dass der Drift- bzw. Diffusionskoeffizient höchstens linear in  $x$  wächst. Da wir aber gefordert hatten, dass das erste und zweite Moment des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\gamma\lambda$  existiert, ist nach Gleichung (2.2)  $\frac{\partial}{\partial t} U_k(t)f$  integrierbar, und wir erhalten aus Gleichung (2.4) unter Verwendung von (2.2) nach Vertauschen von Integration und Differentiation

$$(2.8) \quad \int_{\mathbb{R}} \left( c_k(\theta - x) \frac{\partial(U_k(t)f)(x)}{\partial x} + g_k(x) \frac{\partial^2(U_k(t)f)(x)}{\partial x^2} \right) \gamma(x) \lambda(dx) = 0.$$

Durch ein- bzw. zweimalige partielle Integration erhält man aus dieser Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{d^2}{dx^2} (g_k(x)\gamma(x)) - \frac{d}{dx} (c_k(\theta - x)\gamma(x)) \right) (U_k(t)f)(x) \lambda(dx) = 0.$$

Dabei wurde verwendet, dass die Terme

- $g_k(x)\gamma(x) \frac{\partial}{\partial x}(U_k(t)f)(x)$ ,
- $\frac{d}{dx}(g_k(x)\gamma(x))(U_k(t)f)(x)$  und
- $c_k(\theta - x)\gamma(x)(U_k(t)f)(x)$

für  $x \rightarrow \pm\infty$  verschwinden, was sofort aus der Existenz des ersten und zweiten Moments von  $\gamma\lambda$ ,  $g \in \mathfrak{G} \cap C^2(\mathbb{R})$  und Lemma 2.10 folgt.

Damit das Integral für alle Funktionen  $U_k(t)f$  für  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$  und  $t \geq 0$  Null wird, muss der erste Faktor des Integranden  $\lambda$ -f.s. Null sein, da  $U_k(0)f \equiv f$ . Da aber  $g_k \in C^2(\mathbb{R})$  gilt, ist der erste Faktor sogar stetig. Somit wissen wir, dass  $\gamma$  die Differentialgleichung

$$(2.9) \quad \frac{d^2}{dx^2}(g_k(x)\gamma(x)) - \frac{d}{dx}(c_k(\theta - x)\gamma(x)) = 0$$

lösen muss.

Eigentlich ist die Umkehrung der obigen Schlussweise von Interesse: Folgt aus der Eigenschaft einer Dichte  $\gamma$  eines Wahrscheinlichkeitsmaßes bzgl. des Lebesgue-Maßes Gleichung (2.9) zu lösen schon, dass  $\gamma\lambda$  ein invariantes Maß des Prozesses ist und Gleichung (2.4) erfüllt?

Man gelangt mit den gleichen Argumenten wie oben von (2.9) zurück nach (2.8). Wendet man Kolmogorov's Backward-Equation (Satz 2.6) auf (2.8) an, so lässt sich wie oben Differentiation und Integration vertauschen und wir erhalten für  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} U_k(t)f \cdot \gamma d\lambda = 0.$$

Da  $t \mapsto X_k(t)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}_+$  stetig und  $f$  stetig und beschränkt ist, folgt mit dem Stetigkeits-Lemma für Parameter-abhängige Integrale, dass auch  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} U_k(t)f \cdot \gamma d\lambda$  stetig und nach obiger Gleichung konstant ist. Für  $t = 0$  wissen wir aber, dass  $U_k(0)f \equiv f$ . Daraus folgt Gleichung (2.4) für  $f \in C_b(\mathbb{R})$  mit Lemma 2.8.

Finden wir eine Lösung von (2.9), für die  $\int_{\mathbb{R}} \gamma d\lambda = 1$  gilt, so haben wir also die gewünschte Dichte der Gleichgewichtsverteilung gefunden.

Nach Integration von (2.9) nach  $x$  erhält man

$$\frac{d}{dx}(g_k(x)\gamma(x)) - c_k(\theta - x)\gamma(x) = C_1,$$

mit  $C_1 \in \mathbb{R}$ .

Für die homogene Differentialgleichung (2.9) mit  $C_1 = 0$  ergibt sich als Lösung

$$\gamma_{C_2}(x) = \frac{C_2}{g_k(x)} \exp \left\{ \int_{\theta}^x \frac{c_k(\theta - \xi)}{g_k(\xi)} d\xi \right\}$$

mit  $C_2 \in \mathbb{R}$ , wie man leicht durch Einsetzen nachprüft. Da  $C_2 \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt werden kann, wählen wir  $\theta$  als untere Integrationsgrenze des Integrals im Exponenten, was den Beweis von Lemma 1.3 weniger aufwendig machen wird.

Offensichtlich erfüllt  $\gamma_{C_2}$  mit einer beliebigen Konstanten  $C_2 \in \mathbb{R}$  Gleichung (2.9). Wir müssen also nur noch zeigen, dass  $C_2 > 0$  immer so gewählt werden kann, dass  $\gamma_{C_2}$  die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist:

- (i)  $\gamma_{C_2}$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  wohldefiniert und mit  $C_2 > 0$  auch positiv, denn nach Eigenschaft (iii) der Funktionenklasse  $\mathfrak{G}_*$  (Positivität von  $g_k$ ) gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $g_k(\xi) > \epsilon$  für alle  $\xi \in [\theta, x]$  bzw.  $\xi \in [x, \theta]$ , und somit ist das Integral im Exponenten endlich. Für  $C_2 > 0$  gilt somit  $0 < \gamma_{C_2}(x) < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\gamma_{C_2}(x)$  ist als Verknüpfung Borel-messbarer Funktionen auch wieder Borel-messbar und es gilt für beliebige  $B \in \mathfrak{B}$ :  $\int_B \gamma_{C_2} d\lambda \geq 0$ .
- (iii) Dass  $\int_{\mathbb{R}} \gamma_{C_2} d\lambda$  für alle  $g_k \in \mathfrak{G}_*$  endlich ist, folgt aus den folgenden Lemmata.

Im Folgenden setzen wir wieder  $\gamma_{\theta}^{c,g} := \gamma_1$ , um den Einfluss der Funktion  $g$  und der Konstanten  $c$  und  $\theta$  auf das Verhalten der Dichte  $\gamma$  deutlich zu machen. Ein wichtiges Hilfsmittel für den Nachweis der Endlichkeit des Integrals ist das folgende Lemma:

**2.11 LEMMA.** Seien  $c > 0$  und  $\theta \in \mathbb{R}$  Konstanten und  $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$  mit  $g_1 \leq g_2$ , dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma_{\theta}^{c,g_1}(x) \lambda(dx) \geq \int_{\mathbb{R}} \gamma_{\theta}^{c,g_2}(x) \lambda(dx),$$

mit dem sich der Wert des Integrals nach oben abschätzen lässt (zum Beweis siehe Lemma 3.2). Damit können wir auch schon für eine erste Teilmenge von  $\mathfrak{G}$  die Endlichkeit beweisen:

**2.12 LEMMA.** Seien  $c > 0$  und  $\theta \in \mathbb{R}$  Konstanten und  $g \in \mathfrak{G}$  mit

$$\liminf_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) > 0,$$

dann ist  $\int_{\mathbb{R}} \gamma_{\theta}^{c,g}(x) \lambda(dx) < \infty$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung an  $g$  gibt es ein  $\sigma > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $g(x) \geq \sigma^2$ . Nun ist aber bis auf einen konstanten Faktor  $\gamma_{\theta}^{c,\sigma^2}$  die Dichte der Normalverteilung mit Erwartungswert  $\theta$  und Varianz  $\sigma^2$ , d.h. es gilt insbesondere  $\int_{\mathbb{R}} \gamma_{\theta}^{c,\sigma^2} \lambda(dx) < \infty$  und damit folgt mit Lemma 2.11 die Behauptung.  $\square$

Wir müssen uns jetzt nur noch überlegen, ob das Integral auch für Funktionen endlich bleibt, die nicht von 0 wegbeschränkt bleiben. Funktionen diesen Typs sind allerdings für unsere Betrachtungen nicht von so großem Interesse, da diese wohl nicht gleichmäßig gegen einen Fixpunkt der Abbildung  $g \mapsto F_c g$  konvergieren werden (die Eigenschaft  $g \rightarrow 0$  bleibt unter der Abbildung erhalten) und sich somit die Aussagen der Theoreme 1.8, 1.9 und 1.13 wohl nicht auf diese Funktionenklasse ausweiten lassen. Der Vollständigkeit halber seien sie hier aber trotzdem betrachtet.

Die Endlichkeit des Integrals können wir bisher allerdings nur für Funktionen  $g$  zeigen, die nicht von 0 wegbeschränkt bleiben aber nicht zu schnell gegen 0 konvergieren, d.h. die

$$(2.10) \quad \forall x_0 > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall x \in (-x_0, x_0) : g(x) \geq ce^{-|x|}$$

erfüllen. Diese Eigenschaft geht im folgenden Beweis entscheidend an der Stelle ein, an der wir benötigen, dass  $g(x-1)^2/g(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt.

**2.13 LEMMA.** Seien  $c > 0$  und  $\theta \in \mathbb{R}$  Konstanten und  $g \in \mathfrak{G}$  mit

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

und  $g$  erfülle (2.10), dann ist  $\int_{\mathbb{R}} \gamma_{\theta}^{c,g}(x) \lambda(dx) < \infty$ .

*Beweis.* Die Funktion  $g$  lässt sich nach unten durch eine Funktion  $\tilde{g}$  abschätzen, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &:= \min\{g(y) \mid y \in [-n_{\theta}(x) + \theta, n_{\theta}(x) + \theta]\} \quad \text{mit} \\ n_{\theta}(x) &:= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in [-n + \theta, n + \theta]\}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $\tilde{g}$  hat nach der Konstruktion die Eigenschaften:

- (i)  $0 < \tilde{g} \leq g$
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R} : \tilde{g}(x) \leq g(\theta)$
- (iii)  $\tilde{g}$  ist stückweise konstant und somit messbar
- (iv)  $\tilde{g}(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und erfüllt (2.10)
- (v)  $\tilde{g}$  ist monoton steigend auf  $(-\infty, \theta]$  und monoton fallend auf  $[\theta, \infty)$

Nach Lemma 2.11 genügt es zu zeigen, dass sich der Integrand  $\gamma_{\theta}^{c,\tilde{g}}$  durch eine integrierbare Funktion nach oben beschränken lässt.

Sei  $x \geq \theta+1$ , dann ist das Integral im Exponenten positiv, und wir können ihn durch einen Summanden seiner Reihenentwicklung nach unten abschätzen:

$$\frac{\tilde{g}(x)^{-1}}{\exp\{c \int_{\theta}^x \frac{\xi-\theta}{\tilde{g}(\xi)} d\xi\}} \leq \frac{\tilde{g}(x)^{-1}}{\frac{1}{2}(c \int_{\theta}^x \frac{\xi-\theta}{\tilde{g}(\xi)} d\xi)^2} \leq \frac{\tilde{g}(x)^{-1}}{\frac{1}{2}(c \int_{x-1}^x \frac{\xi-\theta}{\tilde{g}(\xi)} d\xi)^2} =$$

mit dem MWS der Integralrechnung für ein  $y \in (x-1, x)$  und der Monotonie von  $\tilde{g}$  gilt

$$= \frac{\tilde{g}(x)^{-1}}{\frac{1}{2}(c \frac{y-\theta}{\tilde{g}(y)})^2} \leq \frac{2}{c^2} \cdot \frac{\tilde{g}(x-1)^2}{\tilde{g}(x)} \cdot (x-\theta)^{-2}.$$

Da  $\tilde{g}(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ , ist der Quotient  $\tilde{g}(x-1)^2/\tilde{g}(x)$  beschränkt und somit  $\gamma_{\theta}^{c,\tilde{g}}$  auf  $[\theta+1, \infty)$  integrierbar.

Analog folgert man auch die Integrierbarkeit von  $\gamma_{\theta}^{c,\tilde{g}}$  auf  $(-\infty, \theta-1]$ , und die Integrierbarkeit auf  $[\theta-1, \theta+1]$  ist offensichtlich. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Die Dichte der Gleichgewichtsverteilung bzgl. des Lebesgue-Maßes ist somit wie behauptet:

$$\gamma_\theta^{c_k, g_k}(x) = \frac{1}{Z_\theta^{c_k, g_k}} \cdot g_k(x)^{-1} \exp \left\{ c_k \int_\theta^x \frac{\theta - \xi}{g_k(\xi)} d\xi \right\}$$

mit Normierungskonstante

$$Z_\theta^{c_k, g_k} = \int_{\mathbb{R}} g_k(x)^{-1} \exp \left\{ c_k \int_\theta^x \frac{\theta - \xi}{g_k(\xi)} d\xi \right\} \lambda(dx).$$

### 2.2.3 Beweis der Eindeutigkeit

Wir wollen in diesem Abschnitt mit Hilfe eines Kopplungsargumentes zeigen, dass die Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma := \Gamma_\theta^{c, g}$  eindeutig bestimmt ist. Da keine Gefahr der Verwechslung der einzelnen Prozesse besteht, lassen wir der Einfachheit halber in diesem Abschnitt den Index  $k$  weg.

Seien also  $(X(t))_{t \geq 0}$  und  $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$  die eindeutig bestimmten, starken Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (1.4) mit Startmaßen  $\mathcal{L}[X(0)] = \Gamma$  bzw.  $\mathcal{L}[\tilde{X}(0)] = \tilde{\Gamma}$  und *gemeinsamer* Brownscher-Bewegung  $B(t)$ .  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  seien dabei die beiden verschiedenen Gleichgewichtsmaße der stochastischen Differentialgleichung, d.h. es gilt insbesondere

$$0 < \mathbf{E}[|X(0) - \tilde{X}(0)|] < \infty,$$

wenn wir wie im letzten Abschnitt voraussetzen, dass das erste und zweite Moment der Gleichgewichtsmaße existiert.

Eine Kopplung heißt *erfolgreich*, wenn für alle  $\epsilon > 0$  gilt

$$(2.11) \quad \mathbf{P}(|X(t) - \tilde{X}(t)| > \epsilon) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. die Masse des gekoppelten Prozesses konzentriert sich auf der „Diagonalen“. Daraus folgt dann insbesondere, dass das Gleichgewichtsmaß eindeutig bestimmt ist.

Anstatt (2.11) zu zeigen, beweisen wir die stärkere Forderung

$$\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Durch eine geeignete Näherung der Funktion  $|\cdot|$  durch Funktionen in  $C^2(\mathbb{R})$  können wir die Itô-Formel auf  $\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|]$  anwenden und man erhält als Lösung einer daraus entstehenden Differentialungleichung

$$\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|] \leq \mathbf{E}[|X(0) - \tilde{X}(0)|] \cdot e^{-t},$$

woraus die Behauptung folgt.

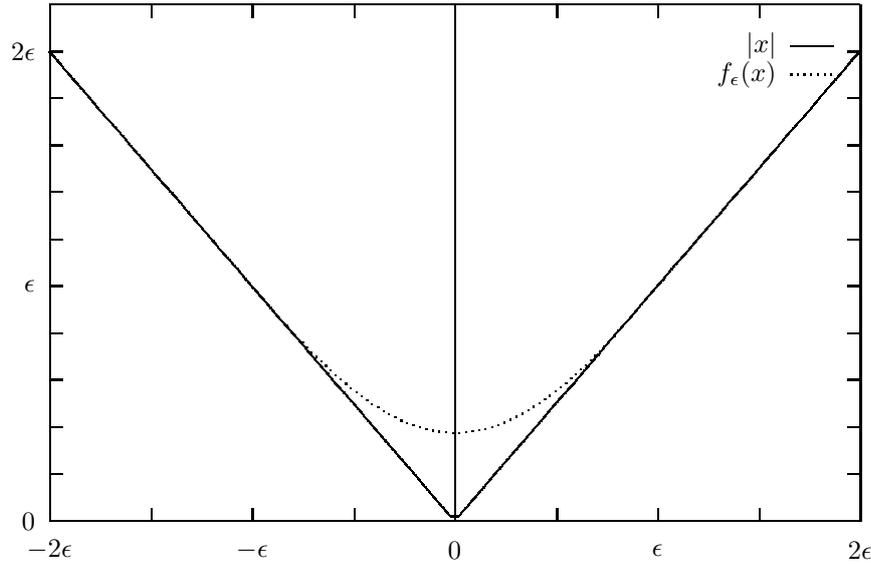
Zeigen wir also obige Ungleichung. Um die Itô-Formel auf  $\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|]$  anwenden zu können, müssen wir wie gesagt die Betragsfunktion  $|\cdot|$  durch eine Funktion  $f_\epsilon \in C^2(\mathbb{R})$  mit  $\epsilon > 0$  annähern (vgl. Abbildung (2.1)):

$$f_\epsilon(x) := \begin{cases} |x| & \text{für } |x| \geq \epsilon \\ -\frac{1}{8\epsilon^3}x^4 + \frac{3}{4\epsilon}x^2 + \frac{3}{8}\epsilon & \text{für } |x| < \epsilon. \end{cases}$$

Für die Ableitungen von  $f_\epsilon$  ergibt sich:

$$f'_\epsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq -\epsilon \\ -\frac{1}{2\epsilon^3}x^3 + \frac{3}{2\epsilon}x & \text{für } |x| < \epsilon \\ 1 & \text{für } x \geq \epsilon \end{cases}$$

$$f''_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq \epsilon \\ -\frac{3}{2\epsilon^3}x^2 + \frac{3}{2\epsilon} & \text{für } |x| < \epsilon. \end{cases}$$


 Abbildung 2.1: Die Funktion  $f_\epsilon$  als Annäherung der Betragsfunktion.

Es ist damit klar, dass  $f_\epsilon \in C^2(\mathbb{R})$ . Da  $f''_\epsilon|_{(-\epsilon, \epsilon)} > 0$ , hat  $f_\epsilon$  sein einziges Minimum bei  $(0 | \frac{3}{8}\epsilon)$ , und es gilt somit für alle  $\epsilon > 0$ , dass  $f_\epsilon > 0$ . Weiterhin folgt mit majorisierter Konvergenz für alle  $t \geq 0$

$$(2.12) \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{E}[f_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))] = \mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|],$$

da für  $\epsilon \leq 1$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f_\epsilon(x) \leq \begin{cases} |x| & \text{für } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{für } |x| < 1 \end{cases} \in L^1(\mathbf{P}^{\Gamma \otimes \tilde{\Gamma}}).$$

Wendet man die Itô-Formel auf  $f_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))$  an, so erhält man:

$$\begin{aligned} df_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t)) &= -f'_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))(X(t) - \tilde{X}(t)) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} f''_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t)) \left( \sqrt{2g(X(t))} - \sqrt{2g(\tilde{X}(t))} \right)^2 dt + \\ &\quad + f'_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t)) \left( \sqrt{2g(X(t))} - \sqrt{2g(\tilde{X}(t))} \right) dB(t), \end{aligned}$$

und der durch  $f_\epsilon$  approximierte Erwartungswert erfüllt die Differentialgleichung

$$(2.13) \quad \begin{aligned} d\mathbf{E}[f_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))] &= -\mathbf{E}[f'_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))(X(t) - \tilde{X}(t))] dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{E} \left[ f''_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t)) \left( \sqrt{2g(X(t))} - \sqrt{2g(\tilde{X}(t))} \right)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 2.1 seien  $S_n$  bzw.  $\tilde{S}_n$  die Stoppzeiten, zu denen  $X$  bzw.  $\tilde{X}$  zum ersten Mal das Intervall  $[-n, n]$  verlassen. Dann gilt für  $0 \leq t \leq S_n \wedge \tilde{S}_n$ :

- (i) Nach Eigenschaft (iii) der Funktionenklasse  $\mathfrak{G}$  (Positivität) gibt es ein  $m_n > 0$ , so dass  $m_n < g(x)$  für alle  $x \in [-n, n]$  gilt. Weiterhin ist  $g$  nach Eigenschaft (i) nach oben beschränkt durch  $C_1 n^2 + C_2$  für geeignete Konstanten  $C_1 \in [0, 1)$  und  $C_2 > 0$ . Damit liegt der Wertebereich von  $g(X(t))$  bzw.  $g(\tilde{X}(t))$  für  $0 \leq t \leq S_n \wedge \tilde{S}_n$  in  $(m_n, C_1 n^2 + C_2]$  und die Wurzelfunktion ist auf diesem Bereich Lipschitz-stetig.
- (ii) Nach Eigenschaft (ii) der Funktionenklasse  $\mathfrak{G}$  ist  $g$  lokal Lipschitz-stetig und für  $0 \leq t \leq S_n \wedge \tilde{S}_n$  sogar *global* Lipschitz-stetig, da  $X(t)$  bzw.  $\tilde{X}(t)$  in  $[-n, n]$  liegen.

Fasst man obige Überlegungen zusammen, so gilt:

$$(2.14) \quad \forall n \in \mathbb{N} \exists L_n > 0 \forall 0 \leq t \leq S_n \wedge \tilde{S}_n : \left| \sqrt{2g(X(t))} - \sqrt{2g(\tilde{X}(t))} \right| \leq L_n |X(t) - \tilde{X}(t)|.$$

Da  $f''_\epsilon \geq 0$ , kann man Ungleichung (2.14) in (2.13) einsetzen, und man erhält eine Differentialungleichung für den Erwartungswert:

$$(2.15) \quad d\mathbf{E}[f_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))] \leq -\mathbf{E}[f'_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))(X(t) - \tilde{X}(t))] dt + \\ + \frac{1}{2} L_n^2 \mathbf{E}[f''_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))(X(t) - \tilde{X}(t))^2] dt,$$

wobei für  $|X(t) - \tilde{X}(t)| \geq \epsilon$  sogar Gleichheit gilt.

Durch eine ähnliche Überlegung, wie wir sie schon bei Gleichung (2.12) für  $f_\epsilon$  angestellt haben, gilt mit majorisierter Konvergenz für  $0 \leq t \leq S_n \wedge \tilde{S}_n$ :

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{E}[f'_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))(X(t) - \tilde{X}(t))] = \begin{cases} \mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|] & \text{für } |X(t) - \tilde{X}(t)| > 0 \\ 0 & \text{für } |X(t) - \tilde{X}(t)| = 0 \end{cases} \\ \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{E}[f''_\epsilon(X(t) - \tilde{X}(t))(X(t) - \tilde{X}(t))^2] = 0.$$

Geht man bei der Differentialungleichung (2.15) zum Grenzwert  $\epsilon \downarrow 0$  über, genügt somit der Erwartungswert  $\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|]$  für  $0 \leq t \leq S_n \wedge \tilde{S}_n$  der Differentialungleichung

$$d\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|] \leq -\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|] dt,$$

die als Lösung

$$\mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|] \leq \mathbf{E}[|X(0) - \tilde{X}(0)|] \cdot e^{-t}$$

hat. Wie wir uns schon in Abschnitt 2.1 überlegt haben, gilt aber  $S_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty$  sowie  $\tilde{S}_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und wir können den Limes des Erwartungswertes für  $t \rightarrow \infty$  betrachten, für den gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X(t) - \tilde{X}(t)|] = 0.$$

## 2.2.4 Momente der Gleichgewichtsverteilung

Für die Berechnung des ersten und zweiten Moments der Markov-Kette ist die Kenntniss des ersten und zweiten Moments der Gleichgewichtsverteilung  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  unabdingbar, die wir im folgenden Lemma mit Hilfe der Itô-Formel berechnen wollen:

**2.14 LEMMA.** (Erstes und zweites Moment der Gleichgewichtsverteilung)

Sei  $\Gamma_\theta^{c_k, g_k}$  die Gleichgewichtsverteilung der stochastischen Differentialgleichung (1.4) wie in Abschnitt 2.2.2 berechnet, dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} x \Gamma_\theta^{c_k, g_k}(dx) = \theta \text{ und} \\ \int_{\mathbb{R}} x^2 \Gamma_\theta^{c_k, g_k}(dx) = \theta^2 + \frac{1}{c_k} (F_{c_k g_k})(\theta).$$

*Beweis.* Aus Korollar 2.7, der Eigenschaft invarianter Maße und der Itô-Formel folgt die Gleichung ( $t > 0$  ist dabei beliebig):

$$\int_{\mathbb{R}} x \Gamma_\theta^{c_k, g_k}(dx) = \mathbf{E}^{\Gamma_\theta^{c_k, g_k}}[X_k(0)] = \mathbf{E}^{\Gamma_\theta^{c_k, g_k}}[X_k(t)] = \\ \stackrel{\text{Itô}}{=} \mathbf{E}^{\Gamma_\theta^{c_k, g_k}}[X_k(0)] + \int_0^t c_k (\theta - \mathbf{E}^{\Gamma_\theta^{c_k, g_k}}[X_k(s)]) ds = \\ = \mathbf{E}^{\Gamma_\theta^{c_k, g_k}}[X_k(0)] + \int_0^t c_k (\theta - \mathbf{E}^{\Gamma_\theta^{c_k, g_k}}[X_k(0)]) ds$$

und damit

$$c_k (\theta - \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k(0)]) = 0.$$

Da  $c_k > 0$ , folgt daraus die Behauptung für das erste Moment.

Aus einer ähnlichen Überlegung bei Verwendung des ersten Moments erhält man als Gleichung für das zweite Moment unter der Voraussetzung  $c_k > 0$  und  $(F_{c_k, g_k})(\theta) < \infty$  (vgl. Lemma 1.3(i)):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 \Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}(dx) &= \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k^2(0)] = \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k^2(t)] = \\ &\stackrel{\text{Itô}}{=} \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k^2(0)] + \int_0^t 2c_k (\theta \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k(s)] - \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k^2(s)]) ds + \\ &\quad + 2 \int_0^t \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [g_k(X_k(s))] ds = \\ &= \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k^2(0)] + 2c_k \int_0^t (\theta^2 - \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k^2(0)] + \frac{1}{c_k} \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [g_k(X_k(0))]) ds \end{aligned}$$

und damit

$$\theta^2 - \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [X_k^2(0)] + \frac{1}{c_k} \mathbf{E}^{\Gamma_{\theta}^{c_k, g_k}} [g_k(X_k(0))] = 0.$$

Mit der Definition des Operators  $F_c$  (vgl. Definition 1.2) folgt daraus die Behauptung für das zweite Moment.  $\square$

# Kapitel 3

## Eigenschaften der Markov-Kette

In diesem Kapitel wollen wir die Ergebnisse beweisen, die in der Einleitung zusammengefasst wurden. Wir halten uns dabei an die Reihenfolge in der Einleitung, und die Überschriften der Sätze und Theoreme stimmen mit denen der Beweise überein.

### 3.1 Wohldefiniertheit

Wir wollen hier nur die Punkte (i) und (ii) des Lemmas 1.3 beweisen, da wir sie auch tatsächlich für die Wohldefiniertheit der Markov-Kette benötigen. Teil (iii) des Lemmas 1.3 macht nur die stark glättende Eigenschaft des Operators  $F_c$  deutlich, die wir nicht weiter verwenden werden.

Die folgenden Beweise wurden hauptsächlich aus [BCGH2, Kapitel 1] adaptiert. Der Einfachheit und der besseren Übersicht halber wollen wir im Folgenden den Index  $k$  der Diffusionsprozesse und der zugehörigen Funktionen und Konstanten weglassen. Wie schon in Kapitel 2 wollen wir mit  $\gamma_\theta^{c,g}$  die Dichte des Gleichgewichtsmaßes bzgl. des Lebesgue-Maßes  $\lambda$  bezeichnen – diesmal jedoch *ohne* Normierungskonstante  $Z_\theta^{c,g}$ . Wie immer ist dabei  $c > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $g \in \mathfrak{G}$ . Die Funktion  $F_c g$  schreibt sich dann als

$$(3.1) \quad (F_c g)(\theta) = \frac{\int_{\mathbb{R}} g(x) \gamma_\theta^{c,g}(x) \lambda(dx)}{\int_{\mathbb{R}} \gamma_\theta^{c,g}(x) \lambda(dx)}.$$

Da  $\gamma_\theta^{c,g}(x) = c^{-1} \gamma_\theta^{1, c^{-1}g}(x)$  und damit  $(F_c g)(\theta) = c(F_1(c^{-1}g))(\theta)$  wollen wir im Weiteren o.B.d.A.  $c = 1$  setzen und vereinfachen dementsprechend die Schreibweise:

$$Fg := F_1 g \\ \gamma_\theta^g := \gamma_\theta^{1,g}$$

Um die Wohldefiniertheit von  $Fg$  zeigen zu können, genügt es zu zeigen, dass sowohl Zähler als auch Nenner von  $(Fg)(\theta)$  für  $g \in \mathfrak{G}$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  endlich bleiben, da nach Voraussetzung die Integranden des Zählers und des Nenners messbar und positiv sind. Daher benötigen wir zunächst einige Eigenschaften des Zählers und des Nenners in (3.1):

**3.1 LEMMA.** *Sei  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $g \in \mathfrak{G}$ , dann gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial x} (g(x) \gamma_\theta^g(x)) = (\theta - x) \gamma_\theta^g, \\ g(\theta) \gamma_\theta^g(\theta) = 1,$$

*d.h. die Funktion  $x \mapsto g(x) \gamma_\theta^g(x)$  ist streng monoton wachsend auf  $(-\infty, \theta)$ , streng monoton fallend auf  $(\theta, \infty)$  und hat als einzigen Extrempunkt ein Maximum in  $(\theta | 1)$ .*

*Beweis.* Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} (g(x) \gamma_\theta^g(x)) = \frac{\partial}{\partial x} \exp\left\{ \int_\theta^x \frac{\theta - \xi}{g(\xi)} d\xi \right\} = \frac{\theta - x}{g(x)} \exp\left\{ \int_\theta^x \frac{\theta - \xi}{g(\xi)} d\xi \right\} = (\theta - x) \gamma_\theta^g \\ g(\theta) \gamma_\theta^g(\theta) = \exp\left\{ \int_\theta^\theta \frac{\theta - \xi}{g(\xi)} d\xi \right\} = 1,$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Ein weiterer wichtiger Schritt ist der Nachweis der Monotonie des Zählers und des Nenners für verschiedene  $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ . Man beachte dabei, dass sich ein gerade entgegengesetztes Monotonieverhalten ergibt:

**3.2 LEMMA.** Sei  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$  mit  $g_1 \leq g_2$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad g_1 \gamma_\theta^{g_1} &\leq g_2 \gamma_\theta^{g_2} && \text{(Isotonie des Zählers)} \\ \text{(ii)} \quad \int_{\mathbb{R}} \gamma_\theta^{g_1}(x) \lambda(dx) &\geq \int_{\mathbb{R}} \gamma_\theta^{g_2}(x) \lambda(dx) && \text{(Antitonie des Nenners)} \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen die Gleichungen (i) und (ii) getrennt, wobei wir beim Beweis von (ii) schon (i) verwenden:

(i) Aus  $g_1 \leq g_2$  und der Positivität der  $g_i$  folgt

$$-\frac{1}{g_1} \leq -\frac{1}{g_2}$$

und daher aus der Isotonie der Exponentialfunktion die Behauptung.

(ii) Zum Beweis teilen wir das Integral über  $\mathbb{R}$  auf in ein Integral über  $(-\infty, \theta)$  und ein Integral über  $(\theta, \infty)$  ( $\lambda$  hat keine Punktmassen!). Mit Lemma 3.1 und partieller Integration gilt dann für beliebige  $b > \theta$ :

$$\begin{aligned} \int_\theta^b \gamma_\theta^{g_1}(x) dx &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\theta+\epsilon}^b \frac{\frac{\partial}{\partial x}(g_1(x)\gamma_\theta^{g_1}(x) - 1)}{\theta - x} dx = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[ \frac{g_1(x)\gamma_\theta^{g_1}(x) - 1}{\theta - x} \right]_{\theta+\epsilon}^b - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\theta+\epsilon}^b \frac{g_1 \gamma_\theta^{g_1}(x) - 1}{(\theta - x)^2} dx = \\ &= \frac{1 - g_1(b)\gamma_\theta^{g_1}(b)}{b - \theta} + \int_\theta^b \frac{1 - g_1(x)\gamma_\theta^{g_1}(x)}{(x - \theta)^2} dx < \infty \end{aligned}$$

und analog

$$\int_\theta^b \gamma_\theta^{g_2}(x) dx = \frac{1 - g_2(b)\gamma_\theta^{g_2}(b)}{b - \theta} + \int_\theta^b \frac{1 - g_2(x)\gamma_\theta^{g_2}(x)}{(x - \theta)^2} dx < \infty.$$

Dabei wurde verwendet, dass für die betrachteten Grenzwerte mit Lemma 3.1 gilt ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{g_i(\theta + \epsilon)\gamma_\theta^{g_i}(\theta + \epsilon) - 1}{-\epsilon} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{g_i(\theta)\gamma_\theta^{g_i}(\theta) - g_i(\theta + \epsilon)\gamma_\theta^{g_i}(\theta + \epsilon)}{\epsilon} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(g_i(x)\gamma_\theta^{g_i}(x)) \Big|_{x=\theta} = 0 \end{aligned}$$

und mit l'Hôpital

$$\lim_{x \downarrow \theta} \frac{1 - g_i(x)\gamma_\theta^{g_i}(x)}{(x - \theta)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \downarrow \theta} \frac{(x - \theta)\gamma_\theta^{g_i}(x)}{x - \theta} = \frac{1}{2} \gamma_\theta^{g_i}(\theta) = \frac{1}{2g_i(\theta)} < \infty$$

Wiederholt man die gleichen Überlegungen für das Integral über  $(a, \theta)$  für beliebige  $a < \theta$  und wendet man (i) auf die Gleichungen an, so erhält man für  $a < \theta < b$ :

$$\int_a^b \gamma_\theta^{g_1}(x) dx \geq \int_a^b \gamma_\theta^{g_2}(x) dx.$$

Mit monotoner Konvergenz folgt dann die Behauptung für Integrale über  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Nun können wir die Wohldefiniertheit des Operators  $F$  auf der Funktionenklasse  $\mathfrak{G}$  zeigen (Lemma 1.3(i)):

**3.3 SATZ.** (Wohldefiniertheit des Operators  $F$ )

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare, positive Funktion (vgl. Definition 1.1(ii–iii)), dann gilt:

- (i) Gibt es eine Konstante  $b > 0$ , so dass  $g(x) \geq x^2 + b$ , dann ist  $(Fg)(\theta) = \infty$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Ist andererseits  $g(x) \leq ax^2 + b$  mit  $0 \leq a < 1$  und  $b > 0$ , dann ist  $(Fg)(\theta) < \infty$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Berechnen wir zunächst den Zähler  $Z_{a,b}(\theta)$  und den Nenner  $N_{a,b}(\theta)$  von  $(Fg)(\theta)$  für  $g(x) = ax^2 + b$  mit  $a > 0$  und  $b > 0$ :

$$\begin{aligned} C_{a,b}(\theta) &= (a\theta^2 + b)^{\frac{1}{2a}} \exp\left\{-\frac{\theta}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{a\theta}{\sqrt{ab}}\right\} < \infty \quad (\theta \in \mathbb{R}) \\ Z_{a,b}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\int_{\theta}^x \frac{\theta - \xi}{a\xi^2 + b} d\xi\right\} \lambda(dx) = \\ &= C_{a,b}(\theta) \int_{\mathbb{R}} (ax^2 + b)^{-\frac{1}{2a}} \exp\left\{\frac{\theta}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{ax}{\sqrt{ab}}\right\} \lambda(dx) \\ N_{a,b}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{ax^2 + b} \exp\left\{\int_{\theta}^x \frac{\theta - \xi}{a\xi^2 + b} d\xi\right\} \lambda(dx) = \\ &= C_{a,b}(\theta) \int_{\mathbb{R}} (ax^2 + b)^{-\frac{1}{2a}-1} \exp\left\{\frac{\theta}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{ax}{\sqrt{ab}}\right\} \lambda(dx). \end{aligned}$$

Schätzt man die Exponentialfunktion in den beiden Integranden entsprechend ab:

$$0 < m(\theta) := \exp\left\{-\frac{\theta}{\sqrt{ab}} \frac{\pi}{2}\right\} < \exp\left\{\frac{\theta}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{ax}{\sqrt{ab}}\right\} < \exp\left\{\frac{\theta}{\sqrt{ab}} \frac{\pi}{2}\right\} =: M(\theta) < \infty,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (ax^2 + b)^{-\frac{1}{2a}} \lambda(dx) &\begin{cases} = \infty & \text{für } a \geq 1 \\ < \infty & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases} \\ \int_{\mathbb{R}} (ax^2 + b)^{-\frac{1}{2a}-1} \lambda(dx) &< \infty \quad \text{für } a > 0 \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2 folgt dann die Behauptung, da der Nenner immer endlich ist, der Zähler aber je nachdem, ob Fall (i) oder (ii) eintritt divergiert oder auch endlich ist. Der Fall  $a = 0$  folgt aus der Eigenschaft, dass konstante Funktionen Fixpunkte des Operators  $F$  sind.  $\square$

Mit dem folgenden Satz ist auch die Rekursion der  $g_k$  für  $g_0 \in \mathfrak{G}_*$  mit den zugehörigen Diffusionsprozessen und deren Gleichgewichtsverteilungen wohldefiniert (Lemma 1.3(ii)):

**3.4 SATZ.** (Wohldefiniertheit der Rekursion)

Sei  $g \in \mathfrak{G}_*$ , dann ist auch  $Fg \in \mathfrak{G}_*$ .

*Beweis.* Den Beweis teilen wir wie die Definition der Funktionenklasse  $\mathfrak{G}_*$  in die Teile (i'), (ii) und (iii) auf:

- (i')  $(Fg)(\theta) = o(\theta^2)$  für  $\theta \rightarrow \pm\infty$ :

Bei diesem Beweis wollen wir vorgehen wie bei den Beweisen in [BCGH2] zu Lemma 1 und 2: Dazu müssen wir zunächst die Funktion  $g$  geeignet abschätzen (vgl. Abbildung (3.1)). Da  $g \in \mathfrak{G}$  gibt es ein  $a \in [0, 1)$  und ein  $b > 0$ , so dass gilt:

$$(3.2) \quad g(x) \leq ax^2 + b \leq \begin{cases} ax^2 + 2\sqrt{ab}x + b = (\sqrt{ax} + \sqrt{b})^2 & \text{für } x \geq 0 \\ ax^2 - 2\sqrt{ab}x + b = (\sqrt{ax} - \sqrt{b})^2 & \text{für } x < 0 \end{cases} =: \tilde{g}(x) \in \mathfrak{G}$$

Nach Voraussetzung ist  $g(x) = o(x^2)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ , d.h. wir können für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N_\epsilon$  finden, so dass  $g(x) \leq (\sqrt{\epsilon}x^2 + \sqrt{b})^2$  für alle  $x \geq N_\epsilon$  und  $g(x) \leq (\sqrt{\epsilon}x^2 - \sqrt{b})^2$  für alle  $x \leq -N_\epsilon$ . Wir wollen nun zeigen, dass auch  $(Fg)(\theta) = o(\theta^2)$  für  $\theta \rightarrow \infty$  (analog zeigt man dies auch für  $\theta \rightarrow -\infty$ ). Sei

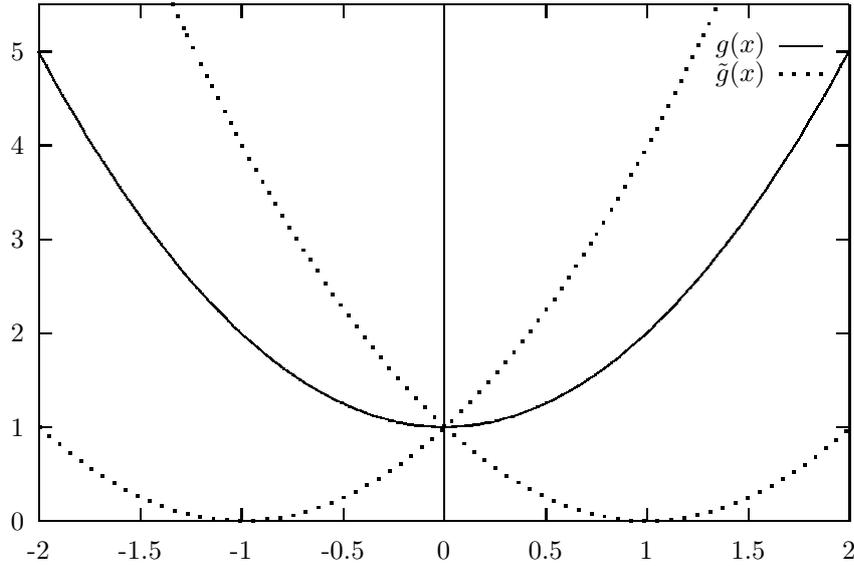


Abbildung 3.1: Die Abschätzung der Funktion  $x^2 + 1$  durch  $(x + 1)^2$  für  $x \geq 0$  bzw.  $(x - 1)^2$  für  $x < 0$  (vgl. Ungleichung (3.2)).

also  $\theta \geq 0$ , dann können wir den Zähler von  $Fg$  nach Lemma 3.2(i) abschätzen durch

$$\begin{aligned}
 Z(\theta) &\leq \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\int_{\theta}^x \frac{\xi - \theta}{\tilde{g}(\xi)} d\xi\right\} \lambda(dx) \leq \\
 &\stackrel{(a)}{\leq} 2N_{\epsilon} + \int_{-\infty}^{-N_{\epsilon}} \exp\left\{-\int_{\theta}^0 \frac{\xi - \theta}{(\sqrt{\epsilon}\xi + \sqrt{b})^2} d\xi - \int_0^x \frac{\xi - \theta}{(\sqrt{\epsilon}\xi - \sqrt{b})^2} d\xi\right\} dx + \\
 &\quad + \int_{N_{\epsilon}}^{\infty} \exp\left\{-\int_{\theta}^x \frac{\xi - \theta}{(\sqrt{\epsilon}\xi + \sqrt{b})^2} d\xi\right\} dx = \\
 (3.3) \quad &= 2N_{\epsilon} + e^{-\frac{1}{\epsilon}} \int_{-\infty}^{-N_{\epsilon}} \left(\frac{\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}x - \sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}\theta - \sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}x - \sqrt{b}} - \frac{2\theta}{\sqrt{\epsilon}b}\right\} dx + \\
 &\quad + e^{-\frac{1}{\epsilon}} \int_{N_{\epsilon}}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}x + \sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}x + \sqrt{b}}\right\} dx \leq \\
 &\stackrel{(b)}{\leq} 2N_{\epsilon} + e^{-\frac{1}{\epsilon}} \epsilon^{\frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2}} (\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b}) \left(\exp\left\{-\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}N_{\epsilon} + \sqrt{b}} + \frac{2\theta\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{b}}\right)\right\} + 1\right) \cdot \\
 &\quad \cdot \int_0^{\frac{1}{\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}N_{\epsilon} + \sqrt{b}}} z^{\frac{1}{\epsilon} - 2} e^{-z} dz.
 \end{aligned}$$

Analog gilt für den Nenner von  $Fg$  nach Lemma 3.2(ii)

$$\begin{aligned}
 N(\theta) &\geq \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)^{-1} \exp\left\{-\int_{\theta}^x \frac{\xi - \theta}{\tilde{g}(\xi)} d\xi\right\} \lambda(dx) \geq \\
 &\stackrel{(a)}{\geq} \int_{N_{\epsilon}}^{\infty} (\sqrt{\epsilon}x + \sqrt{b})^{-2} \exp\left\{-\int_{\theta}^x \frac{\xi - \theta}{(\sqrt{\epsilon}\xi + \sqrt{b})^2} d\xi\right\} dx = \\
 (3.4) \quad &= e^{-\frac{1}{\epsilon}} \int_{N_{\epsilon}}^{\infty} \frac{(\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b})^{\frac{1}{\epsilon}}}{(\sqrt{\epsilon}x + \sqrt{b})^{\frac{1}{\epsilon} - 2}} \exp\left\{-\frac{1}{\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}x + \sqrt{b}}\right\} dx \geq \\
 &\stackrel{(b)}{\geq} e^{-\frac{1}{\epsilon}} \epsilon^{\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2}} (\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b})^{-1} \int_0^{\frac{1}{\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}\theta + \sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon}N_{\epsilon} + \sqrt{b}}} z^{\frac{1}{\epsilon} - 2} e^{-z} dz.
 \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet:

- (a) Der Integrand lässt sich im Intervall  $[-N_\epsilon, N_\epsilon]$  durch 1 nach oben und im Intervall  $(-\infty, N_\epsilon]$  durch 0 nach unten abschätzen.
- (b) Substitution von  $x$  durch  $z := \frac{1}{\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon\theta + \sqrt{b}}}{\sqrt{\epsilon x \pm \sqrt{b}}}$  und Abschätzung des Integranden des Integrals über das negative Intervall von  $Z(\theta)$  durch

$$\exp\left\{-\frac{\sqrt{\epsilon\theta - \sqrt{b}}}{\sqrt{\epsilon x - \sqrt{b}}}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\sqrt{\epsilon\theta + \sqrt{b}}}{\sqrt{\epsilon x - \sqrt{b}}} - \frac{1}{\epsilon} \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{\epsilon N + \sqrt{b}}}\right\}.$$

Betrachtet man nun die in (3.3–3.4) erhaltenen Resultate für festes  $\epsilon$  und  $\theta \rightarrow \infty$ , dann gilt:

$$\limsup_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{-2} \frac{Z(\theta)}{N(\theta)} \leq \frac{e^{\frac{1}{\epsilon}} \epsilon^{\frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2}} \Gamma(\frac{1}{\epsilon} - 1)}{e^{\frac{1}{\epsilon}} \epsilon^{\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{\epsilon} + 1)} = \frac{\epsilon^{-1}}{\frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{\epsilon} - 1)} = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}.$$

Lässt man nun  $\epsilon \downarrow 0$  gehen, dann folgt die Behauptung.

- (ii)  $Fg$  ist lokal Lipschitz-stetig:

Um das zu zeigen, wollen wir beweisen, dass  $(Fg)(\theta)$  auf beliebigen Kompakta  $[-n, n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  stetig nach  $\theta$  differenzierbar ist. Dazu berechnen wir zunächst die partielle Ableitung der Dichte  $\gamma_\theta^g(x)$  nach  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \gamma_\theta^g(x) &= g(x)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \exp\left\{-\int_\theta^x \frac{\xi - \theta}{g(\xi)} d\xi\right\} = \\ (3.5) \quad &= \gamma_\theta^g(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_x^\theta \frac{\xi}{g(\xi)} d\xi - \theta \int_x^\theta \frac{d\xi}{g(\xi)}\right) = \\ &= \gamma_\theta^g(x) \cdot \int_\theta^x \frac{d\xi}{g(\xi)}. \end{aligned}$$

Da  $g(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist diese wohldefiniert und offensichtlich stetig in  $\theta$ .

Da  $g \in \mathfrak{G}$ , existieren Konstanten  $a \in (0, 1)$  und  $b > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $g(x) \leq ax^2 + b$ . Wie im Beweis zum Satz 3.3 folgern wir daraus mit  $M(\theta) := \exp\{\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{ab}\} < \infty$  für beliebige  $\theta \in [-n, n]$ , dass mit

$$\begin{aligned} 0 &< g(x) \gamma_\theta^g(x) < (ax^2 + b)^{-\frac{1}{2a}} M(n) \\ 0 &< \gamma_\theta^g(x) < (ax^2 + b)^{1 - \frac{1}{2a}} M(n) \end{aligned}$$

sowohl Zähler als auch Nenner der Funktion  $Fg$  integrierbare, von  $\theta \in [-n, n]$  unabhängige Majoranten besitzen. Weiterhin gilt aufgrund der Positivität der Funktion  $g$ :

$$\left| \int_\theta^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \right| \leq \int_{-n}^n \frac{d\xi}{g(\xi)} =: M_g < \infty.$$

Damit besitzen auch die partiellen Ableitungen des Zählers und des Nenners nach  $\theta$  eine integrierbare, von  $\theta$  unabhängige Majorante, und es ergibt sich mit majorisierter Konvergenz aus (3.5) als Ableitung von  $Fg$  nach  $\theta$  für  $\theta \in [-n, n]$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (Fg)(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\int_{\mathbb{R}} g(x) \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx)}{\int_{\mathbb{R}} \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx)} = \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{\partial}{\partial \theta} \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx) \cdot \int_{\mathbb{R}} \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx) - \int_{\mathbb{R}} g(x) \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx) \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \theta} \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx)}{(\int_{\mathbb{R}} \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx))^2}, \end{aligned}$$

die nach (3.5) und der Positivität der Funktion  $g$  stetig ist.

Damit ist also  $Fg$  auf jedem Kompaktum  $[-n, n]$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  stetig differenzierbar und somit Lipschitz-stetig. Daraus folgt aber insbesondere die lokale Lipschitz-Stetigkeit.

- (iii)  $Fg$  ist positiv:

Dies folgt direkt aus der Definition von  $Fg$ : Da die Integranden strikt positiv sind, ist sowohl der Zähler  $\int_{\mathbb{R}} g(x) \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx)$  als auch der Nenner  $\int_{\mathbb{R}} \gamma_\theta^g(x) \lambda(dx)$  für beliebige  $\theta \in \mathbb{R}$  strikt positiv.

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Führt man den Beweis der Lipschitz-Stetigkeit der Funktion  $Fg$  mit höheren Ableitungen fort (Punkt (ii) im obigen Beweis), so lässt sich dadurch Lemma 1.3(iii) zeigen, was wir aber im Weiteren nicht benötigen und daher nicht beweisen wollen.

## 3.2 Grundlegende Eigenschaften der Markov-Kette

Wie schon in der Einleitung erwähnt, spielen die folgenden Eigenschaften der Markov-Kette eine wichtige Rolle für die weiteren Beweise.

### 3.2.1 Das erste und zweite Moment

Mit den in Abschnitt 2.2.4 berechneten ersten und zweiten Momenten der Gleichgewichtsverteilungen  $(\Gamma_\theta^{c_k, g_k})_{k \in \mathbb{Z}_+}$ , durch die ja die Übergangskerne  $(K_{-k-1})_{k \in \mathbb{Z}_+}$  der Markov-Kette definiert sind, ist die Berechnung des ersten und zweiten Moments von  $M_{-k}^j$  für  $j \in \mathbb{Z}_+$  und  $0 \leq k \leq j+1$  ein Leichtes. Es genügt dabei unabhängig von  $j$  und  $k$  nur die Induktion über die Anzahl der Glieder der Markov-Kette zu betrachten:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_{-k}^j] &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} x_k \Gamma_\theta^{c_j, g_j}(dx_j) \Gamma_{x_j}^{c_{j-1}, g_{j-1}}(dx_{j-1}) \cdots \Gamma_{x_{k+1}}^{c_k, g_k}(dx_k) \\ \mathbf{E}[(M_{-k}^j)^2] &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} x_k^2 \Gamma_\theta^{c_j, g_j}(dx_j) \Gamma_{x_j}^{c_{j-1}, g_{j-1}}(dx_{j-1}) \cdots \Gamma_{x_{k+1}}^{c_k, g_k}(dx_k) \end{aligned}$$

#### Das erste Moment

Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Glieder. Für  $j \in \mathbb{Z}_+$  und  $k = j+1$  gilt nach der Definition der Markov-Kette:

$$\mathbf{E}[M_{-j-1}^j] = \theta.$$

Für  $j \in \mathbb{Z}_+$  und  $k \mapsto k-1$  (ein Glied *mehr*) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_{-k+1}^j] &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} x_{k-1} \Gamma_\theta^{c_j, g_j}(dx_j) \cdots \Gamma_{x_{k+1}}^{c_k, g_k}(dx_k) \Gamma_{x_k}^{c_{k-1}, g_{k-1}}(dx_{k-1}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} x_k \Gamma_\theta^{c_j, g_j}(dx_j) \cdots \Gamma_{x_{k+1}}^{c_k, g_k}(dx_k) = \\ &\stackrel{\text{IA}}{=} \theta. \end{aligned}$$

#### Das zweite Moment

Den Beweis führen wir auch hier mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Glieder. Für  $j \in \mathbb{Z}_+$  und  $k = -j-1$  gilt nach der Definition der Markov-Kette:

$$\mathbf{E}[(M_{-j-1}^j)^2] = \theta^2.$$

Für  $j \in \mathbb{Z}_+$  und  $k \mapsto k-1$  (ein Glied *mehr*) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(M_{-k+1}^j)^2] &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} x_{k-1}^2 \Gamma_\theta^{c_j, g_j}(dx_j) \cdots \Gamma_{x_{k+1}}^{c_k, g_k}(dx_k) \Gamma_{x_k}^{c_{k-1}, g_{k-1}}(dx_{k-1}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \left( x_k^2 + (F_{c_{k-1} g_{k-1}})(x_k) \frac{1}{c_{k-1}} \right) \Gamma_\theta^{c_j, g_j}(dx_j) \cdots \Gamma_{x_{k+1}}^{c_k, g_k}(dx_k) = \\ &\stackrel{\text{IA}}{=} \theta^2 + (F^j g_0)(\theta) \sum_{l=k}^j \frac{1}{c_l} + \frac{1}{c_{k-1}} ((F_{c_j} \circ \cdots \circ F_{c_{k-1}}) g_{k-1})(\theta) = \end{aligned}$$

wegen der rekursiven Definition der  $g_k$  (1.5)

$$\begin{aligned} &= \theta^2 + (F^j g_0)(\theta) \sum_{l=k}^j \frac{1}{c_l} + (F^j g_0)(\theta) \frac{1}{c_{k-1}} = \\ &= \theta^2 + (F^j g_0)(\theta) \sum_{l=k-1}^j \frac{1}{c_l}. \end{aligned}$$

### 3.2.2 Martingaleigenschaft der Markov-Kette

Dass die Markov-Kette quadratintegrabel ist, haben wir schon bei der Berechnung des zweiten Moments gesehen. Wir müssen also nur noch für  $1 \leq k \leq j + 1$  zeigen, dass gilt

$$\mathbf{E}[M_{-k+1}^j | M_{-j-1}^j, \dots, M_{-k}^j] = M_{-k}^j,$$

was aber sofort daraus folgt, dass  $(M_{-k}^j)_{k=j+1, \dots, 0}$  eine Markov-Kette ist und ihr Übergangskern für  $k \in \mathbb{Z}_+$  die Eigenschaft  $\int_{\mathbb{R}} x K_{-k}(y, dx) = y$  besitzt.

### 3.3 Verhalten der Markov-Kette für $j \rightarrow \infty$

Das Grenzverhalten des Systems unterscheidet sich wesentlich in Abhängigkeit der Konvergenz bzw. Divergenz der Summe der inversen Wechselwirkungsterme. Dementsprechend wurde auch der Beweis des Theorems 1.8 in zwei Abschnitte aufgeteilt: Im folgenden Abschnitt wird der Fall der konvergenten Summe behandelt und ein extremales Entrance Law für die Markov-Kette konstruiert; die Divergenz der Markov-Kette für divergente Summen zeigen wir im anschließenden Abschnitt.

#### 3.3.1 Entrance Law

Der Beweis ist größtenteils aus [DG3, Abschnitt B.4(a)] adaptiert.

Seien für  $i \geq j \geq n$  zwei Markov-Ketten  $(M_{-l}^i)_{l=k, \dots, 0}$  und  $(M_{-l}^j)_{l=k, \dots, 0}$  gegeben, die durch (1.1–1.2) und (1.5) definiert sind. Die beiden Markov-Ketten unterscheiden sich dabei nur in ihrer Startverteilung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[M_{-k}^i] &= \delta_\theta K_{-i-1} \circ \dots \circ K_{-k-1} \text{ und} \\ \mathcal{L}[M_{-k}^j] &= \delta_\theta K_{-j-1} \circ \dots \circ K_{-k-1}. \end{aligned}$$

- (i) Die Startverteilung konvergiert im Grenzfalle  $i, j \rightarrow \infty$  und  $k \rightarrow \infty$  in  $L^2$  gegen die Punktmasse in  $\theta$ : Da wir vorausgesetzt haben, dass  $g = g_0 \equiv \sigma^2$ , folgt auch  $F^i g = F^j g \equiv \sigma^2$ , und somit gilt für die Varianz der Startverteilungen, da die Summe der inversen Wechselwirkungsterme konvergiert,

$$(3.6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \geq n} \mathbf{Var}[M_{-k}^i] = \sigma^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{c_l} = 0.$$

Daraus folgt aber insbesondere, dass für  $i = i(k) \geq k$  und  $k \rightarrow \infty$  die Startverteilung in  $L^2$  gegen die Punktmasse in  $\theta$  konvergiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(M_{-k}^{i(k)} - \theta)^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{Var}[M_{-k}^{i(k)}] \stackrel{(3.6)}{=} 0.$$

Analoges folgern wir für  $j$ .

Bevor wir weitere Überlegungen anstellen, wollen wir die Verteilung der Differenz der Startverteilungen genauer betrachten ( $i \geq j$ ):

Die Markov-Ketten  $(M_{-l}^j)_{l=k, \dots, 0}$  und  $(M_{-l}^i)_{l=k, \dots, 0}$  sind insbesondere Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen, deren zeitliche Entwicklung aber für die Zeitpunkte  $-k, \dots, 0$  voneinander abhängig ist. Für  $k = j + 1$  klar, dass  $\mathcal{L}[M_{-j-1}^i - M_{-j-1}^j] = \mathcal{L}[M_{-j-1}^i - \theta]$ . Weiterhin wird für  $k < j + 1$  die Differenz der beiden Prozesse zum Zeitpunkt  $-j - 1$  durch die *gemeinsamen* Übergangskerne  $K_{-j-1}, \dots, K_{-1}$  transportiert, ohne dass die Startverteilung  $\mathcal{L}[M_{-j-1}^i - \theta]$  eine Rolle spielt. Man kann also die Differenz der Startverteilungen der beiden Markov-Ketten zerlegen in

$$(3.7) \quad \mathcal{L}[M_{-k}^i - M_{-k}^j] = \mathcal{L}[M_{-j-1}^i - \theta] \circ \mathcal{L}[M_{-k}^j | M_{-j-1}^j = M_{-j-1}^i - \theta].$$

- (ii) Für  $k \in \mathbb{Z}_+$  konvergiert die Startverteilung  $\mathcal{L}[M_{-k}^j]$  in  $L^2$  gegen das Entrance Law  $\alpha_{-k}$  zum Zeitpunkt  $k$ :

Die Differenz der Startverteilungen konvergieren für  $i = i(j) \geq j$  und  $j \rightarrow \infty$  in  $L^2$  gegen das 0-Maß für beliebige Zeitpunkte  $k \in \mathbb{N}$ , was direkt aus (3.7) folgt, da mit (3.6)  $M_{-j-1}^{i(j)} - \theta \xrightarrow{L^2} 0$  für  $j \rightarrow \infty$  gilt. Die Startverteilungen für den Zeitpunkt  $-k$  in Abhängigkeit von  $j$  sind somit eine Cauchy-Folge in  $L^2$  und konvergieren daher in  $L^2$  gegen eine Verteilung  $\alpha_{-k}$  (vgl. [Bau1, Satz 15.7]).

Diese Startverteilungen sind die gesuchten Verteilungen des Entrance Laws  $\alpha_k$ . Wir müssen nur noch zeigen, dass die Übergangskerne durch den Grenzübergang unverändert bleiben.

(iii) Die Übergangskerne  $(K_{-k})_{k \in \mathbb{N}}$  der Markov-Kette zur Zeit  $-k$  bleiben durch den Grenzübergang  $i, j \rightarrow \infty$  unverändert und transportieren das extremale Entrance Law  $(\alpha_{-k})_{k \in \mathbb{N} \cup \infty}$ :

Sei  $\nu_k^j := \mathcal{L}[M_{-k}^j]$  die Startverteilung der Markov-Kette  $(M_{-l}^j)_{l=k, \dots, 0}$ . Nach (ii) konvergiert diese für  $j \rightarrow \infty$  in  $L^2$  gegen eine Startverteilung  $\alpha_{-k}$ . Durch eine ähnliche Überlegung wie in (ii) folgt, dass auch  $\nu_k^j \circ K_{-k}$  für  $j \rightarrow \infty$  in  $L^2$  gegen  $\alpha_{-k} \circ K_{-k}$  konvergiert und die beiden Maße  $\alpha_{-k+1}$  und  $\alpha_{-k} \circ K_{-k}$  übereinstimmen: Für beliebige  $A \in \mathfrak{B}$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times A} (\nu_k^j \circ K_{-k})(dy, dx) &= \int_{\mathbb{R}} \nu_k^j(dy) K_{-k}(y, A) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \alpha_{-k}(dy) K_{-k}(y, A) = \\ &= \int_{\mathbb{R} \times A} (\alpha_{-k} \circ K_{-k})(dy, dx) \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R} \times A} (\nu_k^j \circ K_{-k})(dy, dx) = \int_A \nu_{k+1}^j(dx) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_A \alpha_{-k+1}(dx).$$

Nach (ii) gilt für beliebige  $k \in \mathbb{Z}_+$  und  $j \rightarrow \infty$ , dass  $M_{-k}^j \xrightarrow{L^2} \alpha_{-k}$ . Daher können wir aufgrund der Linearität des Integrals mit dem „Cramer-Wold-Device“ (vgl. [Bil, Theorem 7.7]) folgern, dass für beliebige  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathcal{L}[(M_{-l}^j)_{l=k, \dots, 0}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[(M_{-l}^\infty)_{l=k, \dots, 0}],$$

Nach (iii) ist  $(M_{-l}^\infty)_{l=k, \dots, 0}$  wieder eine Markov-Kette mit Übergangskernen  $K_{-l}$  zum Zeitpunkt  $l$ . Wir müssen nur noch zeigen, dass f.s. gilt  $M_{-\infty}^\infty \equiv \theta$ .

(iv)  $M_{-\infty}^\infty$  existiert f.s. und es gilt  $\mathbf{E}[M_{-\infty}^\infty] = \theta$ :

Die Martingal-Eigenschaft der Markov-Kette  $(M_{-k}^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  folgt durch die gleichen Überlegungen wie für endliches  $j$ . Aus dem Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale folgt dann die fast sichere Existenz und Endlichkeit von  $M_{-\infty}^\infty$  wegen der uniformen Integrierbarkeit der Markov-Kette  $(M_{-k}^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ : Sei  $m > 0$  beliebig gewählt. Nach Voraussetzung ist das zweite Moment der Markov-Kette  $M_{-k}^j$  gleichmäßig in  $j$  und  $k$  beschränkt. Da  $M_{-k}^j$  nach Definition f.s. endlich ist, folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{j, k} \mathbf{E}[|M_{-k}^j| \mathbf{1}_{\{|M_{-k}^j| > m\}}] = 0.$$

Aus der uniformen Integrierbarkeit des Martingals folgt somit insbesondere

$$\mathbf{E}[M_{-\infty}^\infty] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[M_{-k}^\infty] = \lim_{j, k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[M_{-k}^j] = \theta.$$

Mit (iv), dem Lemma von Fatou und (i) folgt, dass  $M_{-\infty}^\infty$  f.s. existiert und endlich ist und der Ungleichungskette

$$0 \leq \mathbf{E}[(M_{-\infty}^\infty - \theta)^2] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(M_{-k}^\infty - \theta)^2] = 0$$

genügt, woraus die Behauptung folgt.

### 3.3.2 Divergenz

Wir wollen zeigen, dass sich die Markov-Kette unter der Voraussetzung  $g \equiv \sigma^2$  wie eine Brownsche Bewegung zu vorgegebenen Zeitpunkten verhält. Dazu zeigen wir, dass die Markov-Kette zum Zeitpunkt  $-k$  durch eine Faltung  $j - k + 1$  normalverteilter Zufallsvariablen erzeugt werden kann:

Es sei  $(N_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  eine Folge  $N(0, \sigma^2/c_k)$ -verteilter Zufallsvariablen und  $y_j = x_j - \theta$  eine Transformation, dann gilt für  $k = j$  und  $A \in \mathfrak{B}$  beliebig:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_{-j}^j \in A) &= \int_A \sqrt{\frac{c_j}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_j(x_j - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} dx_j = \\ &= \int_{y_j(A)} \sqrt{\frac{c_j}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_j y_j^2}{2\sigma^2}\right\} dy_j = \\ &= \mathbf{P}(N_j \in y_j(A)) = \mathbf{P}(\theta + N_j \in A) \end{aligned}$$

und für die Verknüpfung zweier Übergangskerne ( $0 \leq k \leq j-1$ ) mit  $y_i = x_i - m$  ( $i = k-1, k$ ) Transformationen gilt für  $A \in \mathfrak{B}$  beliebig:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_{-k}^j \in A \mid M_{-k-2}^j = m) &= \\ &= \int_A \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{c_{k-1}}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_{k-1}(x_{k-1}-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \sqrt{\frac{c_k}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_k(x_k-x_{k-1})^2}{2\sigma^2}\right\} dx_{k-1} dx_k = \\ &= \int_{y_k(A)} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{c_{k-1}}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_{k-1}y_{k-1}^2}{2\sigma^2}\right\} \sqrt{\frac{c_k}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_k(y_k-y_{k-1})^2}{2\sigma^2}\right\} dy_{k-1} dy_k = \\ &= \mathbf{P}(N_{k-1} + N_k \in y_k(A) \mid M_{-k-2}^j = m) = \\ &= \mathbf{P}(m + N_{k-1} + N_k \in A \mid M_{-k+2}^j = m). \end{aligned}$$

Wendet man obige Gleichung rekursiv für gegebenes  $M_{k-3}^j, \dots, M_{-j}^j$  an, dann erhält man für  $j \in \mathbb{Z}_+$  und  $0 \leq k \leq j+1$

$$(3.8) \quad \mathbf{P}(M_{-k}^j \in A) = \mathbf{P}\left(\theta + \sum_{l=k}^j N_l \in A\right).$$

Setzt man

$$t_k^{(j)} := \sigma^2 \sum_{l=k}^j \frac{1}{c_l},$$

so lässt sich (3.8) schreiben als

$$(3.9) \quad \mathbf{P}(M_{-k}^j \in A) = \mathbf{P}(B_{t_k^{(j)}} \in A \mid B_0 = \theta),$$

wobei  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine Standard-Brownsche Bewegung ist. Da aber nach Voraussetzung die Summe der inversen Wechselwirkungsterme divergiert und somit  $t_k^{(j)} \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ , gilt aufgrund des Verhaltens Standard-Brownscher Bewegungen für beliebiges  $A \in \mathfrak{B}$

$$\mathbf{P}(M_{-k}^j \in A) = \begin{cases} 0 & A \text{ beschränkt} \\ \frac{1}{2} & \{+\infty\} \in A \\ \frac{1}{2} & \{-\infty\} \in A \end{cases},$$

woraus die Behauptung folgt.

## 3.4 Diffusives Clustern

Im ersten Abschnitt wollen wir das Theorem beweisen und im zweiten die drei angegebenen Beispiele für kleine, mittlere und große Cluster durchrechnen:

### 3.4.1 Beweis des Theorems

Für den Beweis zitieren wir [Bro, Theorem 3]. Dazu führen wir zunächst einige abkürzende Schreibweisen ein ( $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  sei dabei das betrachtete Martingal):

$$(3.10) \quad \begin{aligned} X_n &:= M_n - M_{n-1} \\ m_n^2 &:= \mathbf{E}[(M_n)^2] \\ v_n^2 &:= \mathbf{E}[(X_n)^2 \mid M_{n-1}] \\ V_n^2 &:= \sum_{k=1}^n v_k^2. \end{aligned}$$

Dann gilt:

**3.5 THEOREM.** Sei  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  ein Martingal mit  $M_0 = 0$ , das

$$(m_n^2)^{-1} V_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 1.$$

erfüllt und sei  $(\xi_n(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}$  ein durch

$$\xi_n(\alpha) := (m_n^2)^{-\frac{1}{2}} (M_k + X_k(\alpha m_n^2 - m_k^2) / (m_{k+1}^2 - m_k^2))$$

definierter stetiger stochastischer Prozess, wobei  $k$  bzw.  $\alpha$  so gewählt sind, dass  $m_k^2 \leq \alpha m_n^2 \leq m_{k+1}^2$  gilt.

Wenn das Martingal die Lindeberg-Bedingung erfüllt, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 : (m_n^2)^{-1} \sum_{l=1}^n \mathbf{E}[(X_l)^2 \mathbf{1}_{\{(X_l)^2 \geq \epsilon m_n^2\}} | M_{l-1}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0,$$

dann konvergiert  $\xi_n$  für  $n \rightarrow \infty$  schwach in Verteilung gegen eine Standard-Brownsche-Bewegung  $(B(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}$  auf  $[0, 1]$ :  $\mathcal{L}[(\xi_n(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{w}} \mathcal{L}[(B(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}]$ .

Betrachten wir also das Martingal  $(M_n)_{n=0, \dots, j+1} := (M_{n-j-1}^j - \theta)_{n=0, \dots, j+1}$  für  $j \in \mathbb{Z}_+$ , dann gilt für die Abkürzungen (3.10)

$$\begin{aligned} m_n^2 &= \sigma^2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{c_k} \\ v_n^2 &= \int_{\mathbb{R}} (x_n - M_{n-1})^2 \Gamma_{M_{n-1}}^{c_n, \sigma^2}(dx_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x_n^2 - 2x_n M_{n-1} + M_{n-1}^2) \Gamma_{M_{n-1}}^{c_n, \sigma^2}(dx_n) = \\ &= M_{n-1}^2 + \sigma^2 \frac{1}{c_n} - 2M_{n-1}^2 + M_{n-1}^2 = \sigma^2 \frac{1}{c_n} \\ V_n^2 &= \sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} = m_n^2 - \sigma^2 \frac{1}{c_0} \end{aligned}$$

und damit punktweise und daher auch in Wahrscheinlichkeit

$$(m_n^2)^{-1} V_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1,$$

da nach der Voraussetzung des Theorems 1.9 die Summe der inversen Wechselwirkungsterme divergiert und somit auch  $m_n^2 \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Es bleibt noch die Lindeberg-Bedingung zu zeigen. Unter der Voraussetzung, die wir in Abschnitt 1.3.3 getroffen haben, dass

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} = \limsup_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k}$$

gilt, folgt:

**3.6 LEMMA.** Sei  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  eine Markov-Kette definiert durch (1.1–1.2) und (1.5) mit  $g \equiv \sigma^2$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$  und  $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_k^{-1} = \infty$ .

Genau dann erfüllt das Martingal  $(M_k^j - \theta)_{k=-j-1, \dots, 0}$  die Lindeberg-Bedingung, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} = \infty.$$

*Beweis.* Wir wollen zunächst die bedingte Erwartung  $\mathbf{E}[(M_k^j - M_{k-1}^j)^2 \mathbf{1}_{\{(M_k^j - M_{k-1}^j)^2 \geq \epsilon m_j^2\}} | M_{k-1}^j]$  unter den im Lemma getroffenen Voraussetzungen berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(M_k^j - M_{k-1}^j)^2 \mathbf{1}_{\{(M_k^j - M_{k-1}^j)^2 \geq \epsilon m_j^2\}} | M_{k-1}^j = M] &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - M)^2 \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus B_{\epsilon m_j}(M)}(x) \Gamma_M^{c_k, \sigma^2}(dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus B_{\epsilon m_j}(M)} (x - M)^2 \cdot \sqrt{\frac{c_k}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_k(x - M)^2}{2\sigma^2}\right\} \lambda(dx) = \end{aligned}$$

mit der Transformation  $y = \sqrt{c_k}(x - M)/\sigma$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R} \setminus B_{\epsilon m_j \sqrt{c_k}/\sigma}(0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma^2}{c_k} \cdot y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \lambda(dy) = \\
 &= 2 \frac{\sigma^2}{c_k} \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sqrt{c_k}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma^2}{c_k} \left( \epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sqrt{c_k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\epsilon^2 m_j^2 \frac{c_k}{\sigma^2}\right\} + \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sqrt{c_k}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right).
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichung in die Lindeberg-Bedingung ein, so ergibt sich für die beiden Fälle

(i)  $\lim c_j m_j^2 = \infty$ :

Insbesondere ist dann  $\liminf\{c_k \mid 0 \leq k \leq j\} \cdot m_j^2 = \infty$  für  $j \rightarrow \infty$  und

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sigma^2}{m_j^2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^j \left( \epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sqrt{c_k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{m_j^2}{\sigma^2} c_k\right\} + \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sqrt{c_k}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \leq \\
 &\leq \epsilon \frac{\sigma}{m_j} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{m_j^2}{\sigma^2} \inf c_k\right\} \sum_{k=0}^j \frac{1}{\sqrt{c_k}} + \\
 &+ \frac{\sigma^2}{m_j^2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \inf \sqrt{c_k}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \cdot \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} = \\
 &= \epsilon \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{m_j^2}{\sigma^2} \inf c_k\right\} \sum_{k=0}^j \frac{1}{\sqrt{c_k}} \left(\sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k}\right)^{-\frac{1}{2}} + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \inf \sqrt{c_k}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

für alle  $\epsilon > 0$ .

(ii)  $\lim c_j m_j^2 < \infty$ :

Insbesondere ist dann  $\limsup\{c_k \mid 0 \leq k \leq j\} \cdot m_j^2 < \infty$  für  $j \rightarrow \infty$  und

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sigma^2}{m_j^2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^j \left( \epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sqrt{c_k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{m_j^2}{\sigma^2} c_k\right\} + \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sqrt{c_k}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \geq \\
 &\geq \frac{\sigma^2}{m_j^2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sup \sqrt{c_k}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \cdot \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon \frac{m_j}{\sigma} \sup \sqrt{c_k}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy > 0,
 \end{aligned}$$

für alle  $\epsilon > 0$  und  $j \rightarrow \infty$ .

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Betrachtet man statt  $(\xi_n(\alpha))_{\alpha \in [0,1]}$ , wie in obigem Theorem definiert, den rechtsseitig stetigen stochastischen Prozess

$$\tilde{\xi}_n(\alpha) := (m_n^2)^{-\frac{1}{2}} M_k,$$

wobei  $k$  so gewählt ist, dass  $m_k^2 \leq \alpha m_n^2 < m_{k+1}^2$  gilt, dann stimmt dieser für alle  $\alpha = 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$  mit dem Prozess  $\xi$  überein, hat aber keine stetigen Pfade mehr. Für  $n \rightarrow \infty$  liegt die Teilmenge, auf der die beiden Prozesse übereinstimmen, jedoch dicht in  $[0, 1]$ . Stimmen eine stetige und eine rechtsseitig stetige Funktion auf einer in  $[0, 1]$  dicht liegenden Teilmenge überein, so sind sie aber schon identisch.

Da  $(m_k)_{k=0, \dots, n}$  streng monoton wachsend und unbeschränkt ist, ist es offensichtlich immer möglich eine Funktion  $f_j(\alpha)$  zu finden, die die Ungleichung

$$(3.11) \quad \frac{(m_{-f_j(\alpha)})^2}{m_n^2} \leq \alpha < \frac{(m_{-f_j(\alpha)+1})^2}{m_n^2}$$

und die Bedingungen (i) und (ii) aus Theorem 1.9 erfüllt.

Wir haben also für das Martingal  $(M_k^j - \theta)_{k=-j-1, \dots, 0}$  die Behauptung gezeigt. Da wir aber das Martingal mit  $(m_n^2)^{-\frac{1}{2}}$  skalieren, das ja nach Voraussetzung eine Nullfolge für  $n \rightarrow \infty$  ist, erhält man das selbe Resultat, wenn man eine beliebige Konstante – etwa  $\theta$  – zu jedem Glied des Martingals addiert.

### 3.4.2 Beweis der Korollare

Wir verwenden in den folgenden Beweisen zur Bestimmung der mittleren Clustergröße die durch Gleichung (3.11) gegebene Bedingung zur Wahl der Funktion  $f_j(\alpha)$ . Offensichtlich konvergiert dabei die linke Seite der Ungleichungskette gegen die rechte für  $j \rightarrow \infty$ , so dass es genügt eine Funktion  $f_j(\alpha)$  zu finden, die den Bedingungen (i) und (ii) aus Theorem 1.9 genügt und asymptotisch bestimmt ist durch

$$(3.12) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(m_{-f_j(\alpha)})^2}{m_n^2} = \alpha.$$

Da es bei der Klassifizierung der Clustergröße und bei der Betrachtung des Diffusionslimes nur auf den Grenzfall  $j \rightarrow \infty$  ankommt, ist  $f_j(\alpha)$  durch diese Gleichung und den Bedingungen (i) und (ii) wohldefiniert.

#### Kleine Cluster: $c_k = c(k+1)$

Für  $c > 0$  befindet sich dieses Beispiel im Bereich des diffusiven Clusters:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_k} &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \\ \lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} &= \lim_{j \rightarrow \infty} (j+1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k} = \infty. \end{aligned}$$

$f_j(\alpha) = -\lfloor (j+2)^\alpha \rfloor + 1$  ist eine Funktion von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{Z}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}_+$  und

- (i) sie ist offensichtlich monoton fallend und
- (ii)  $f_j(0) = -\lfloor (j+2)^0 \rfloor + 1 = -1 + 1 = 0$ ,  
 $f_j(1) = -\lfloor (j+2)^1 \rfloor + 1 = -j - 2 + 1 = -j - 1$ .

Für die weiteren Überlegungen macht man sich klar, dass sich die Summe der inversen Wechselwirkungsterme wie folgt durch Integrale abschätzen lässt:

$$\ln(j+2) = \int_0^{j+1} \frac{1}{x+1} dx \leq \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{j+1} \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(j+1).$$

Es gilt somit

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \ln(j+2)}{1 + \ln(j+1)} &\leq \frac{\ln \lfloor (j+2)^\alpha \rfloor + 1}{1 + \ln(j+1)} \leq \\ &\leq \frac{\lfloor (j+2)^\alpha \rfloor - 1}{\sum_{k=0}^{\lfloor (j+2)^\alpha \rfloor - 1} (k+1)} \bigg/ \sum_{k=0}^j \frac{1}{k+1} \leq \\ &\leq \frac{1 + \ln \lfloor (j+2)^\alpha \rfloor}{\ln(j+2)} \leq \frac{1 + \alpha \ln(j+2)}{\ln(j+2)} \end{aligned}$$

wobei sowohl die linke, als auch die rechte Seite der Ungleichung für  $j \rightarrow \infty$  gegen  $\alpha$  konvergiert.

Diese Wechselwirkungsterme erzeugen kleine Cluster, da gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f_j(\alpha)}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\lfloor (j+2)^\alpha \rfloor + 1}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-(j+2)^\alpha}{j} = \begin{cases} -1 & \text{für } \alpha = 1 \\ 0 & \text{für } \alpha < 1 \end{cases}.$$

**Mittlere Cluster:  $c_k = c(k+1)^\beta$** 

Für  $c > 0$  und  $\beta < 1$  befindet sich dieses Beispiel im Bereich des diffusiven Clusters:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_k} &= \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta} \geq \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \\ \lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} &= \lim_{j \rightarrow \infty} (j+1)^\beta \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k^\beta} \geq \\ (\beta \geq 0) &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} (j+1)^\beta \int_0^{j+1} x^{-\beta} dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} (j+1) = \infty \quad \text{bzw.} \\ (\beta < 0) &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} (j+1)^\beta \left( 1 + \int_1^{j+1} x^{-\beta} dx \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\beta}{\beta-1} (j+1)^\beta + \frac{1}{1-\beta} (j+1) \right) = \infty \end{aligned}$$

$f_j(\alpha) = -[\alpha(j+1)]$  ist eine Funktion von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{Z}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}_+$  und

- (i) sie ist offensichtlich monoton fallend und
- (ii)  $f_j(0) = 0$ ,  
 $f_j(1) = -j - 1$ .

Ersetzt man wie bei der Betrachtung des Beispiels für kleine Cluster die Summe durch ein Integral, was ohne weiteres möglich ist, da die Summe der inversen Wechselwirkungsterme monoton wächst, so gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{k=1}^{[\alpha(j+1)]} k^{-\beta}}{\sum_{k=1}^{j+1} k^{-\beta}} \right) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\int_1^{\alpha(j+1)} x^{-\beta} dx}{\int_1^{j+1} x^{-\beta} dx} \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\alpha(j+1))^{1-\beta} - 1}{(j+1)^{1-\beta} - 1} = \alpha^{1-\beta}. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\alpha \mapsto \alpha^{1-\beta}$  ist für  $\beta < 1$  bijektiv. Wir können daher die Zeitskala des Diffusionslimes ohne weiteres so anpassen, dass sie der durch  $f_j(\alpha)$  erzeugten entspricht (vgl. Theorem 3.5).

Diese Wechselwirkungsterme erzeugen mittlere Cluster, da gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f_j(\alpha)}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-[\alpha(j+1)]}{j} = -\alpha.$$

**Große Cluster:  $c_k = c \exp\{-ak^b\}$** 

Für  $c > 0$ ,  $a > 0$  und  $0 < b < 1$  befindet sich dieses Beispiel im Bereich des diffusiven Clusters (zweite Ungleichungskette mit l'Hôpital):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_k} &= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{ak^b\} \geq \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty \\ \lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \exp\{-aj^b\} \sum_{k=0}^j \exp\{ak^b\} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \exp\{-aj^b\} \int_0^{j-1} \exp\{ax^b\} dx = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{ab} j^{1-b} \exp\{a((j-1)^b - j^b)\} = \infty. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass  $(j+d)^b - j^b \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ ,  $d \in \mathbb{R}$  und  $b < 1$ , was leicht aus dem Mittelwertsatz folgt.

$f_j(\alpha) = -\left[\left(\frac{\ln \alpha}{a} \vee -(j+1)^b\right) + (j+1)^b\right]^{1/b}$  ist eine Funktion von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{Z}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}_+$  und

- (i) sie ist offensichtlich monoton fallend und
- (ii)  $f_j(0) = -(-(j+1)^b + (j+1)^b)^{1/b} = 0$ ,  
 $f_j(1) = -((j+1)^b)^{1/b} = -j - 1$ .

Ersetzt man wie bei der Betrachtung des Beispiels für kleine Cluster die Summe durch ein Integral, was ohne weiteres möglich ist, da die Summe der inversen Wechselwirkungsterme monoton wächst, so gilt mit

l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor (\frac{\ln \alpha}{a} + (j+1)^b)^{1/b} \rfloor} \exp\{ak^b\}}{\sum_{k=0}^j \exp\{ab^b\}} \right) &= \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{\int_1^{(\frac{\ln \alpha}{a} + (j+1)^b)^{1/b}} \exp\{ax^b\} dx}{\int_0^j \exp\{ax^b\} dx} \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \exp\{\ln \alpha + a(j+1)^b - aj^b\} = \alpha. \end{aligned}$$

Diese Wechselwirkungsterme erzeugen große Cluster, da gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f_j(\alpha)}{j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\lfloor (\frac{\ln \alpha}{a} \vee -(j+1)^b) + (j+1)^b \rfloor^{1/b}}{j} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\lfloor (\frac{\ln \alpha}{a} \vee -(j+1)^b) + (j+1)^b \rfloor^{1/b}}{j} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = 0 \\ -1 & \text{für } \alpha > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

### 3.5 Macro-Clustern

Zuerst überlegen wir uns, dass sich ein System mit einer Wechselwirkungskette der Form  $c_k = c \exp\{-ak\}$  mit  $a, c > 0$  im Bereich des Micro-Clusterns befindet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_k} &= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{ak\} \geq \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty \\ \lim_{j \rightarrow \infty} c_j \sum_{k=0}^j \frac{1}{c_k} &= \lim_{j \rightarrow \infty} e^{-aj} \sum_{k=0}^j e^{ak} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-aj}}{e^a - 1} = \frac{1}{e^a - 1} < \infty \end{aligned}$$

Können wir dann weiterhin zeigen, dass die Übergangskerne der reskalierten Markov-Kette schwach in Verteilung gegen Übergangskerne mit transformierten Wechselwirkungstermen

$$\tilde{c}_k := \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j-k} h(j)^2$$

konvergiert, dann folgt daraus schon für beliebige  $k \in \mathbb{Z}_+$ :

$$\mathcal{L}[h(j)^{-1} M_{k-j-1}^j] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\tilde{M}_k^\infty].$$

Da die Markov-Kette unabhängige Zuwächse hat, gilt aber dann insbesondere auch für  $k, l \in \mathbb{Z}_+$  mit  $k \neq l$  und  $\lambda_k, \lambda_l \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[\lambda_k h(j)^{-1} M_{k-j-1}^j + \lambda_l h(j)^{-1} M_{l-j-1}^j] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\lambda_k \tilde{M}_k^\infty + \lambda_l \tilde{M}_l^\infty].$$

Mit Hilfe des „Cramer-Wold-Device“ (vgl. [Bil, Theorem 7.7]) folgt dann die Behauptung.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $\tilde{c}_k$  wohldefiniert ist und die Übergangskerne wie behauptet konvergieren:

(i)  $\tilde{c}_k$  ist wohldefiniert, von 0 wegbeschränkt und endlich:

Berechnen wir zum Beweis die Wechselwirkungskette  $(\tilde{c}_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ . Sei  $k \in \mathbb{Z}_+$  beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j-k} h(j)^2 = \sigma^2 \lim_{j \rightarrow \infty} c_{j-k} \sum_{l=0}^j \frac{1}{c_l} = \sigma^2 \lim_{j \rightarrow \infty} e^{a(k-j)} \sum_{l=0}^j e^{al} = \\ &= \sigma^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{e^{ak} - e^{-a(j-k)}}{e^a - 1} = \sigma^2 \frac{e^{ak}}{e^a - 1} \begin{cases} < \infty & \text{und} \\ > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Die Übergangskerne konvergieren schwach in Verteilung bei festem  $m := \widetilde{M}_k^\infty$ :

Da es zu jeder Funktion  $f \in C_b(\mathbb{R})$  eine Folge von Elementarfunktionen gibt, die gegen  $f$  aufsteigt, genügt es für beliebige  $A \in \mathfrak{B}$  und  $k \in \mathbb{Z}_+$  zu zeigen, dass sich der Übergangskern wie behauptet verhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(h(j)^{-1}M_{k-j-1}^j \in A \mid h(j)^{-1}M_{k-1-j-1}^j = m) &= \Gamma_{mh(j)}^{c_{j-k}, \sigma^2}(A \cdot h(j)) = \\ &= \int_{A \cdot h(j)} \sqrt{\frac{c_{j-k}}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_{j-k}(x - mh(j))^2}{2\sigma^2}\right\} \lambda(dx) = \\ &= \int_A \sqrt{\frac{c_{j-k}h(j)^2}{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{c_{j-k}h(j)^2}{2\sigma^2}(x - m)^2\right\} \lambda(dx) \end{aligned}$$

Da  $0 < \tilde{c}_k < \infty$ , konvergiert die Varianz des normalverteilten Übergangskerns gegen  $\sigma^2/\tilde{c}_k$ . Damit konvergiert aber der Übergangskern schwach in Verteilung gegen eine  $N(m, \sigma^2/\tilde{c}_k)$ -verteilte Zufallsvariable und es folgt die Behauptung.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\widetilde{M}_\infty^\infty$  f.s. existiert und f.s. endlich ist. Wie man leicht sieht, ist die Markov-Kette  $(\widetilde{M}_k^\infty)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  ein quadratintegrables Martingal und das Supremum seiner zweiten Momente ist beschränkt. Mit dem Martingal-Konvergenzsatz folgt dann die Behauptung.

# Kapitel 4

## Theorie und Simulation der Iteration der $g_k$

In diesem Kapitel werden wir die Eigenschaften des Operators  $F_c$  (vgl. Definition 1.2) und seines Orbits  $(F^n g)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  für  $g \in \mathfrak{G}_*$  anhand einiger Beispiele verdeutlichen, die mit Mathematica 3.0 graphisch dargestellt wurden. Für exakte Beweise sei auf die Artikel [BCGH1, BCGH2] verwiesen.

Wie wir schon in Abschnitt 3.1 gesehen haben, gilt  $F_c g = c \cdot F_1(c^{-1}g)$ . Da wir bei dieser Simulation nur an der prinzipiellen Form der Funktionen  $F^n g$  interessiert sind, wollen wir die Faktoren  $c$  bzw.  $c^{-1}$  vernachlässigen: Sie ändern nichts an dem „Aussehen“ der Funktion  $F_c g$  sondern strecken bzw. stauchen diese nur entlang der Abszisse. Daher wollen wir in den folgenden Beispielen mit der Wechselwirkungskette  $c_k = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}_+$  arbeiten und  $F_1$  mit  $F$  abkürzen.

Das „Programm“, mit dem diese Graphen in Mathematica 3.0 erstellt wurden, lässt sich mit schon fertig implementierten Funktionen realisieren. Daher wollen wir hier nicht näher darauf eingehen.

### 4.1 Glättenden Eigenschaften des Operators $F$

Wie wir in Lemma 1.3 behaupten und in Satz 3.4 für die erste Ableitung beweisen, gilt für beliebiges  $g \in \mathfrak{G}$ , dass  $Fg \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Dies veranschaulicht Abbildung (4.1) mit  $g(x) = |x| + 1$  (für einen Beweis siehe [BCGH1, Abschnitt 2.6]).

### 4.2 Fixpunkte und Fixformen

Wie wir bereits in der Einleitung und bei den Beweisen zu den Eigenschaften der Markov-Kette  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  gesehen haben, spielen Fixpunkte und Fixformen des Operators  $F$  eine entscheidende Rolle. Daher ist die folgende Vermutung von Bedeutung (vgl. dazu auch [BCGH2, Theorem 1–2 und Lemma 5(c)]):

#### 4.1 VERMUTUNG. (Fixpunkte und Fixformen)

- (i) Die einzigen Fixpunkte in  $\mathfrak{G}_*$  haben die Form  $g(x) = \sigma^2$  mit  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$ .
- (ii) Es gibt keine Fixformen in  $\mathfrak{G}_*$ . Die Fixformen in  $\mathfrak{G}$  haben die Gestalt  $g(x) = ax^2 + b$  mit  $0 < a < 1$  und  $b > 0$ , und sie erfüllen die Gleichung  $Fg = \frac{1}{1-a}g$ .

Zum Beweis dieser Vermutung wird man ähnlich vorgehen, wie bei den Beweisen zu Theorem 1 und Theorem 2 in [BCGH2]. Für diese Beweise ist die Kenntnis der Fixformen des Operators nötig. Wegen der komplizierten Gestalt der Funktion  $Fg$  für  $g(x) = ax^2 + b$  (vgl. Abschnitt 3.1), ist es uns leider nicht möglich gewesen explizit zu beweisen, dass Funktionen dieser Form Fixformen sind. Dies wird aber einsichtig, wenn man Abbildung (4.2) betrachtet: Hier stimmt für  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$  die Funktion  $Fg$ , so weit man es aus dem Graphen beurteilen kann, mit  $x^2 + 2 = 2(\frac{1}{2}x^2 + 1)$  überein.

Bei dem hier dargestellten Beispiel beachte man insbesondere, dass  $Fg$  nicht mehr in  $\mathfrak{G}$  liegt. Daher ist es tatsächlich nötig, dass wir zur Betrachtung des Orbits  $F^n$  des Operators  $F$  zum Funktionenraum  $\mathfrak{G}_*$  übergehen, wie wir es in Lemma 1.3(ii) gesehen haben.

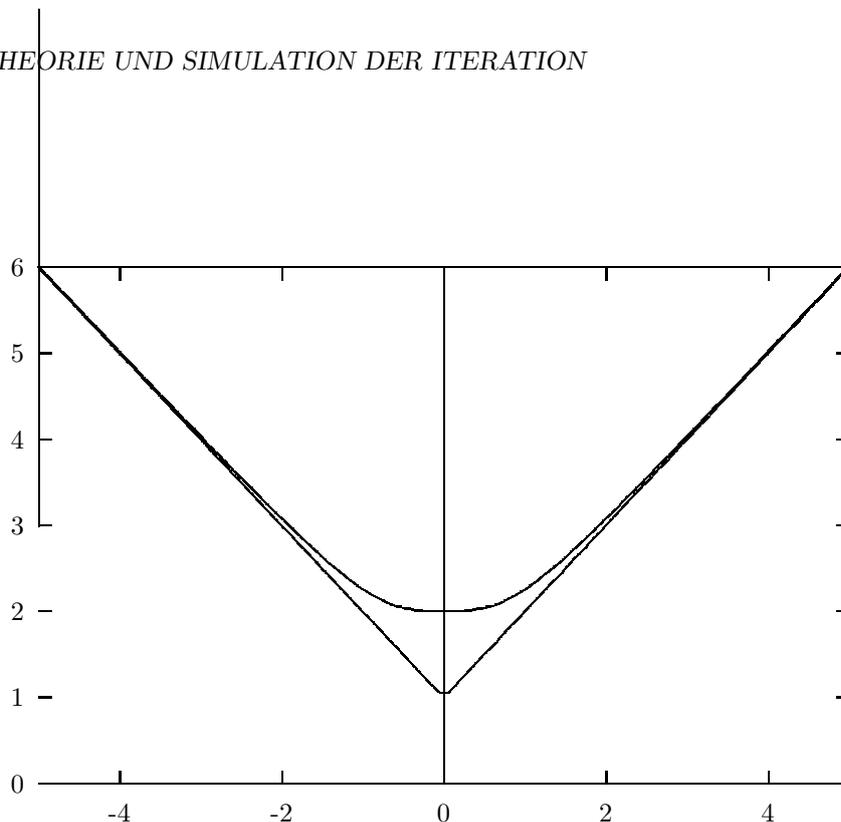


Abbildung 4.1: Die Funktion  $g(x) = |x| + 1$  und  $Fg$ .

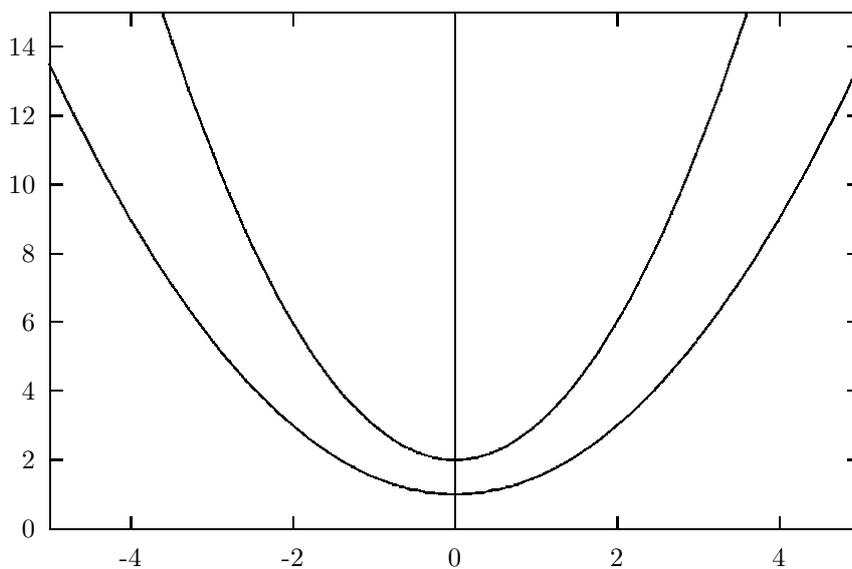


Abbildung 4.2: Die Funktion  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$  und  $(Fg)(x) = x^2 + 2$  als Fixform von  $F$ .

Zum Abschluss seien nochmals die Fixformen der Operatoren in Abhängigkeit der Zustandsräume in einer Tabelle zusammengefasst:

Zustandsraum	$g(x)$	$(Fg)(x)$
$[0, 1]$	$ax(1 - x), a > 0$	$\frac{a}{1+a}g(x)$
$\mathbb{R}_+$	$ax^2 + bx, a \in (0, 1), b \geq 0$	$\frac{a}{1-a}g(x)$
$\mathbb{R}$	$ax^2 + b, a \in (0, 1), b > 0$	$\frac{1}{1-a}g(x)$

### 4.3 Konvergenzverhalten an Beispielen

Ähnlich wie in [BCGH2] wollen wir in diesem Abschnitt das Konvergenzverhalten der Funktionenfolge  $g_n = F^n g$  betrachten und Kriterien aufstellen, wann

- (i) die Funktionenfolge gleichmäßig gegen den Fixpunkt des Operators  $F$  konvergiert (vgl. [BCGH2, Theorem 3]),
- (ii) der Grenzwert der Funktionenfolge punktweise für alle  $x \in \mathbb{R}$  durch einen Fixpunkt des Operators nach oben bzw. nach unten abgeschätzt werden kann oder
- (iii) die Funktionenfolge reskaliert werden muss zu  $g_n = e_n F^n g$ , mit einer geeigneten Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ , um zu erreichen, dass sie konvergiert (vgl. [BCGH2, Theorem 4]).

Da die Beweise hierzu den Umfang der Diplomarbeit sprengen würden, wollen wir versuchen unsere Vermutungen in den folgenden Abschnitten mit Beispielen zu untermauern.

#### 4.3.1 Gleichmäßige Konvergenz gegen Fixpunkt

Ähnlich wie bei den Zustandsräumen  $[0, 1]$  und  $\mathbb{R}_+$  wird es Funktionen  $g \in \mathfrak{G}_*$  geben, so dass die Funktionenfolge  $g_n = F^n g$  gleichmäßig gegen den Fixpunkt des Operators konvergieren wird:

#### 4.2 VERMUTUNG. (Konvergenz gegen Fixpunkt)

Ist  $g \in \mathfrak{G}_*$  und existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sigma^2 \in (0, \infty) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \sigma^2 \in (0, \infty)$$

und stimmen überein, dann konvergiert die Funktionenfolge  $g_n = F^n g$  gleichmäßig gegen die konstante Funktion  $g_\infty \equiv \sigma^2$ .

Wichtig ist in diesem Fall, dass die Grenzwerte der Funktion  $g$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow +\infty$  übereinstimmen. Tun sie es nicht, so können wir nur noch folgern, dass die Funktionenfolge durch Fixpunkte des Operators nach oben bzw. nach unten beschränkt bleibt (siehe dazu Abschnitt 4.3.2). Der Beweis dieser Vermutung wird dem Beweis des Theorems 3 in [BCGH2] ähneln, da sich die Operatoren  $F$  auf den Zustandsräumen  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}$  ähnlich verhalten. Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses siehe Abbildung (4.3) und (4.4).

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über das Konvergenzverhalten der Funktionenfolge  $g_n = F^n g$  im Falle, dass sie gegen die Fixform bzw. den Fixpunkt des Operators  $F$  konvergiert (vgl. [BCGH1, Theorem 1] und [BCGH2, Theorem 3]):

Zustandsraum	Gleichmäßige Konvergenz gegen Fixform bzw. Fixpunkt des Operators $F$
$[0, 1]$	Genügt $g$ den entsprechenden Bedingungen (i), (ii) und (iii) der Funktionenmenge $\mathfrak{G}$ sowie $g(0) = g(1) = 0$ , dann konvergiert die Funktionenfolge $g_n = n \cdot F^n g$ gleichmäßig gegen die Fixform $g_*(x) = x(1 - x)$ . Man beachte, dass man die Funktionenfolge im Gegensatz zu den beiden folgenden Fällen mit $n$ skalieren muss, um Konvergenz gegen die Fixform des Operators zu erhalten. Die Fixform ist dafür eindeutig bestimmt und nicht von einem weiteren Parameter abhängig.
$\mathbb{R}_+$	Genügt $g$ den entsprechenden Bedingungen (i'), (ii) und (iii) der Funktionenmenge $\mathfrak{G}_*$ sowie $g(0) = 0$ und gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1}g(x) = a \in (0, \infty)$ , dann konvergiert die Funktionenfolge $g_n = F^n g$ gleichmäßig gegen den Fixpunkt $g_a(x) = ax$ .
$\mathbb{R}$	Ist $g \in \mathfrak{G}_*$ und gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ , dann konvergiert die Funktionenfolge $g_n = F^n g$ gleichmäßig gegen den Fixpunkt $\sigma^2$ .

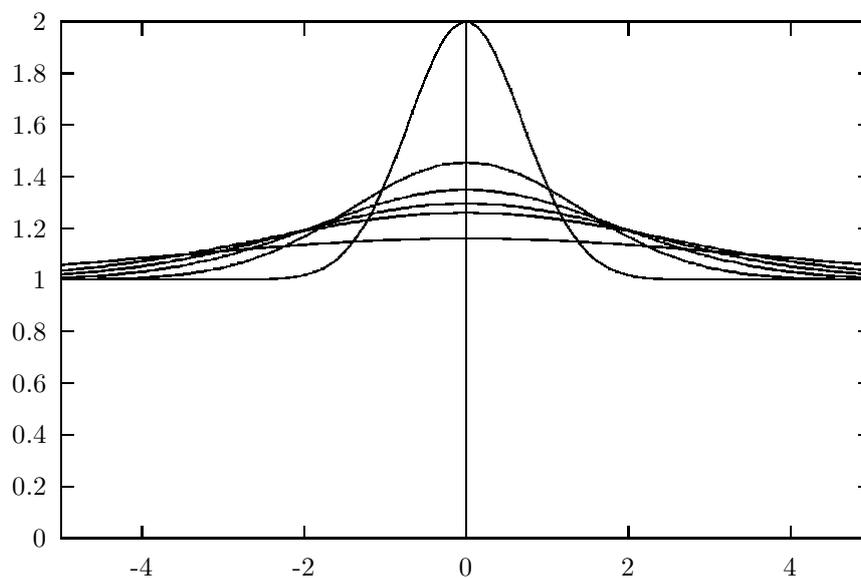


Abbildung 4.3: Die Funktion  $g(x) = e^{-x^2} + 1$  und die iterierten Funktionen  $F^1g, F^2g, F^3g, F^4g$  und  $F^{10}g$  mit bei jedem Iterationsschritt monoton fallendem Maximum.

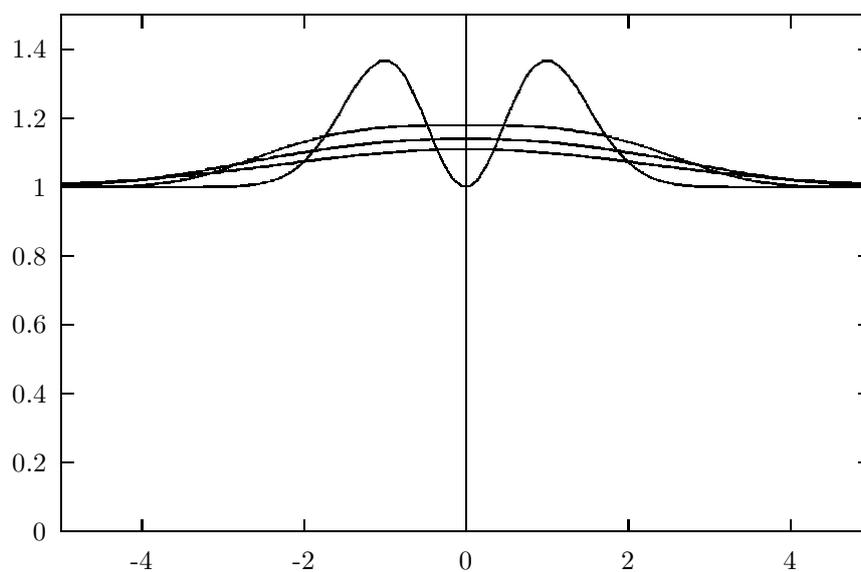


Abbildung 4.4: Die Funktion  $g(x) = x^2 e^{-x^2} + 1$  und die iterierten Funktionen  $F^1g, F^4g$  und  $F^{10}g$  mit bei jedem Iterationsschritt monoton fallendem Maximum.

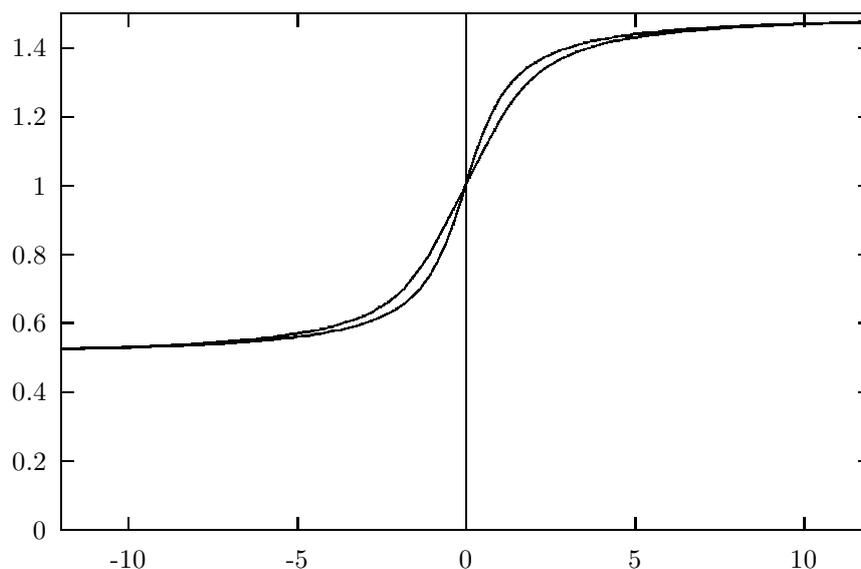


Abbildung 4.5: Die Funktion  $g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + 1$  und die iterierte Funktion  $F^1 g$  (im Uhrzeigersinn gedreht).

### 4.3.2 Beschränkte Grenzfunktion

Liegen sowohl  $\liminf$  als auch  $\limsup$  der Funktion  $g$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  im Intervall  $(0, \infty)$ , sind aber im Gegensatz zum in Abschnitt 4.3.1 nicht alle gleich, dann kann man wohl nicht mehr erreichen, dass die Funktionenfolge  $g_n = F^n g$  gegen den Fixpunkt des Operators  $F$  konvergiert. Die Funktionenfolge wird aber trotzdem zumindest punktweise gegen eine Grenzfunktion  $g_\infty$  konvergieren, die sich geeignet abschätzen lässt:

#### 4.3 VERMUTUNG. (Beschränkte Grenzfunktion)

Ist  $g(x) \in \mathfrak{G}_*$  mit endlichen, von 0 wegbeschränkten Grenzwerten für  $x \rightarrow \infty$ , dann konvergiert die Funktionenfolge  $g_n = F^n g$  zumindest punktweise gegen eine Grenzfunktion  $g_\infty$ , für die gilt:

$$\min\{\liminf_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)\} \leq g_\infty \leq \max\{\limsup_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)\}.$$

Als typisches Beispiel wurde hier die Funktion  $g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + 1$  gewählt (siehe Abbildung (4.5)), für die  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{2}$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{3}{2}$  gilt. Das Ergebnis scheint für diese Funktion plausibel. Und auch für Funktionen, deren Maximum über dem Maximum der  $\limsup$  oder deren Minimum unter dem Minimum der  $\liminf$  liegt, ist es mit Vermutung 4.2 anschaulich klar, dass Vermutung 4.3 gilt.

Als weiteres Beispiel wollten wir noch die Funktion  $g(x) = \frac{1}{2} \cos(2\pi x) + 1$  betrachten, um das Verhalten des Operators bei nicht übereinstimmenden  $\liminf$  und  $\limsup$  zu visualisieren. Leider kam die Berechnung der Funktion  $Fg$  nach dreieinhalb Tagen wegen des oszillierenden Integranden und den daraus resultierenden Rechenungenauigkeiten nicht zu einem Ende, so dass wir abbrechen mussten.

### 4.3.3 Konvergenz nach Reskalierung der Funktionenfolge

Aus den Abbildungen (4.6) und (4.7) wird klar, dass die Grenzfunktion von Funktionen, die für  $x \rightarrow \pm\infty$  divergieren, wohl nicht durch Fixpunkte, d.h. Konstanten, nach oben beschränkt werden können. Wir könnten aber ähnlich wie bei der Konvergenz der Funktionenfolge  $n \cdot F^n g$  gegen eine Fixform des Operators mit Zustandsraum  $[0, 1]$  versuchen die Funktionenfolge  $F^n g$  geeignet mit einer Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  zu skalieren, so dass  $e_n F^n g$  gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die zumindest beschränkt ist (vgl. dazu [BCGH2, Theorem 4]).

**4.4 VERMUTUNG.** Ist  $\bar{g} \in \mathfrak{G}_*$  und verhält sich  $g(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  asymptotisch wie  $x^\alpha$  mit  $\alpha \in (0, 2)$ , dann existiert eine Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ , so dass  $e_n F^n g$  punktweise konvergiert und mit  $0 < m \leq M < \infty$

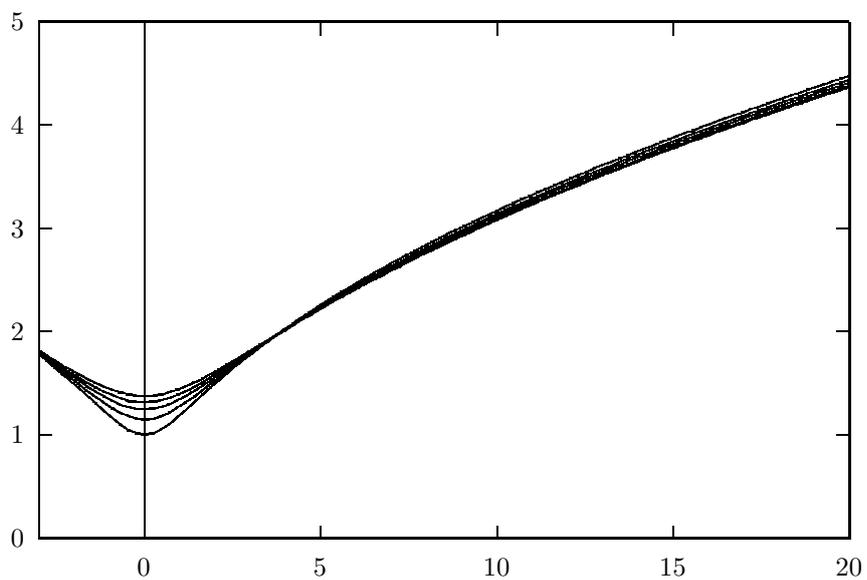


Abbildung 4.6: Die Funktion  $g(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{4}}$  und die iterierten Funktionen  $F^1g, F^2g, F^3g$  und  $F^4g$  mit bei jedem Iterationsschritt monoton steigendem Minimum.

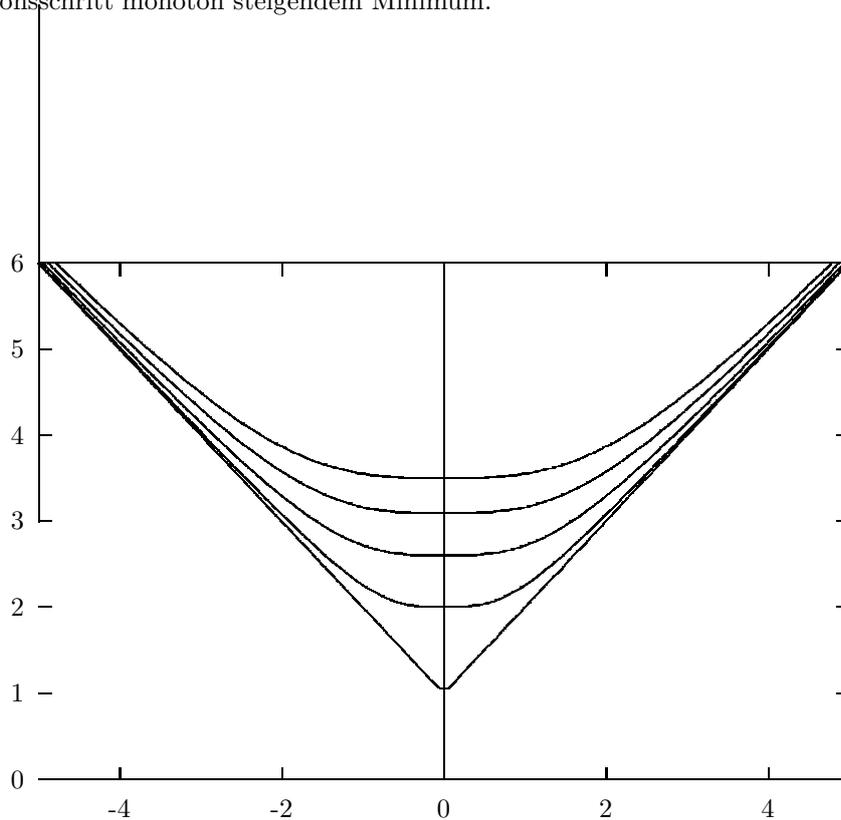


Abbildung 4.7: Die Funktion  $g(x) = |x| + 1$  und die iterierten Funktionen  $F^1g, F^2g, F^3g$  und  $F^4g$  mit bei jedem Iterationsschritt monoton steigendem Minimum.

punktweise gilt:

$$m \leq \min\{\liminf_{n \rightarrow \pm\infty} e_n F^n g\} \leq \max\{\limsup_{n \rightarrow \pm\infty} e_n F^n g\} \leq M.$$

Diese Vermutung lässt sich nur schwer mit Graphen eines Orbits plausibel machen, und es ist auch fraglich, ob diese Vorgehensweise für Funktionen  $g(x)$ , die sich asymptotisch wie  $x^\alpha$  mit  $\alpha > 1$  verhalten, überhaupt funktioniert, da der Operator  $F$  für konvexe Funktionen  $g$  „oberhalb“ der Funktionen vom Typ  $a|x| + b$  mit  $a, b > 0$  die Konvexität erhält und somit der Orbit eine monoton wachsende Funktionenfolge bildet.

# Kapitel 5

## Ausblick

Diese Arbeit weist noch einige Lücken auf, die in eventuell folgenden Veröffentlichungen noch zu schließen sein werden:

- (i) Die Eigenschaften der Markov-Kette  $(M_k^j)_{k=-j-1, \dots, 0}$  wurden hauptsächlich nur für Funktionen  $g \in \mathfrak{G}_*$  untersucht, die Fixpunkte des Operators  $F$  sind. Die Ergebnisse waren dementsprechend einfach unter Verwendung von Eigenschaften der Normalverteilung zu erhalten.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Markov-Kette verhält, wenn nicht in einem Fixpunkt des Operators  $F$  gestartet wird. Durch die Rekursion (1.5) entsteht dadurch eine Folge von Funktionen  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ , die vielleicht Einfluss auf das Verhalten der Markov-Kette nehmen könnte. Es zeigt sich schon in [DG3], dass die entsprechende Funktionenklasse  $\mathfrak{G}_*$  nochmals eingeschränkt werden muss, um zu denselben Ergebnissen zu gelangen, die man auch für den Fixpunkt erhält.

Für das in dieser Arbeit behandelte Beispiel wäre eine geeignete Einschränkung etwa, dass für ein geeignetes  $\sigma \in \mathbb{R}^\times$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k - \sigma^2\| = 0$$

gilt, wobei  $\|\cdot\|$  die Supremumsnorm bezeichnet (vgl. auch Vermutung 4.2).

- (ii) Weiterhin ist es nötig das Verhalten des Operators  $F$  und seines Orbits genauer zu untersuchen, und die Vermutungen 4.1 bis 4.4 in Analogie zu [BCGH2] zu beweisen. Eventuell ergibt sich bei Vermutung 4.4 ein für den Zustandsraum  $\mathbb{R}_+$  nicht auftretendes Verhalten für Funktionen  $g(x)$ , die sich asymptotisch wie  $x^\alpha$  mit  $\alpha \geq 1$  für  $x \rightarrow \infty$  verhalten.

# Literaturverzeichnis

- [Bau1] Heinz Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter, Berlin, 2. Auflage 1992.
- [Bau2] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter, Berlin, 4. Auflage 1991.
- [BCGH1] J.-B. Baillon, Ph. Clément, A. Greven und F. den Hollander. On the attracting orbit of a non-linear transformation arising from renormalization of hierarchically interacting diffusions. Part I: The compact case. *Canadian Journal of Mathematics*, **47** S.3–27, 1995.
- [BCGH2] J.-B. Baillon, Ph. Clément, A. Greven und F. den Hollander. On the attracting orbit of a non-linear transformation arising from renormalization of hierarchically interacting diffusions. Part II: The non-compact case. To appear in: *Journal of Functional Analysis*.
- [Bil] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 1968.
- [Bre] Leo Breiman. *Probability*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.
- [BS] Il'ja N. Bronstein und Konstantin A. Semendjaev. *Taschenbuch der Mathematik*. Harry Deutsch, Thun, 24. Auflage 1989.
- [Bro] B. M. Brown. Martingale Central Limit Theorems. *Annals of Mathematical Statistics*, **42**(1) S.59–66, 1971.
- [Chu] Kai L. Chung. *Lectures from Markov processes to Brownian motion*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 249. Springer, New York, 1982.
- [CGS] J. T. Cox, A. Greven und T. Shiga. Finite and infinite systems of interacting diffusions. Part I. *Probability Theory Related Fields*, **102** S.165–197, 1995.
- [DG1] Donald A. Dawson und Andreas Greven. Multiple time scale analysis of interacting diffusions. *Probability Theory Related Fields*, **95** S.467–508, 1993.
- [DG2] Donald A. Dawson und Andreas Greven. Hierarchical models of interacting diffusions: multiple time scale phenomena, phase transition and pattern of cluster-formation. *Probability Theory Related Fields*, **96** S.435–473, 1993.
- [DG3] Donald A. Dawson und Andreas Greven. Multiple space-time scale analysis for interacting branching models. *Electronic Journal of Probability*, **1**(14) S.1–84, 1996.
- [Dyn1] Eugene B. Dynkin. *Markov Processes. Volume I*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 121. Springer, Berlin, 1965.
- [Dyn2] Eugene B. Dynkin. *Markov Processes. Volume II*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 122. Springer, Berlin, 1965.
- [For1] Otto Forster. *Analysis 1*. Vieweg, Braunschweig, 4. Auflage 1983.
- [For2] Otto Forster. *Analysis 2*. Vieweg, Braunschweig, 5. Auflage 1984.
- [HH] P. Hall und C. C. Heyde. *Martingale Limit Theory and Its Application*. Academic Press, New York, 1980.

- [KS] Ioannis Karatzas und Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York, 2. Auflage 1996.
- [KT] Samuel Karlin und Howard M. Taylor. *A second course in stochastic processes*. Academic Press, New York, 1981.
- [Kle] Achim Klenke. Different Clustering Regimes in Systems of Hierarchially Interacting Diffusions. *Annals of Probability*, **24**(2) S.660–697, 1996.
- [Kop] Andreas Kopietz. *Clusterformation für wechselwirkende Diffusionen*. Diplomarbeit an der Georg-August-Universität Göttingen, 1995.
- [Lig] Thomas M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer, New York, 1985.
- [Mae] Roman E. Maeder. *Programming in Mathematica*. Addison-Wesley, Reading, MA, 3. Auflage 1997.
- [MRSZ] S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokoloff und Ya. B. Zeldovich. Intermittency, Diffusion and Generation in a Nonstationary Random Medium. *Soviet Scientific Review of Mathematical Physics*, **7** S.1–110, 1988.
- [Øks] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, 1995.
- [RW] L. C. G. Rogers und David Williams. *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Volume 1: Foundations*. Wiley, Chichester, 2. Auflage 1994.
- [Sau] Andreas Sauter. *Hierarchische Systeme wechselwirkender Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse*. Diplomarbeit an der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 1997.
- [Shi] Tokuzo Shiga. Ergodic Theorems and Exponential Decay of Sample Paths for Certain Interacting Diffusion Systems. *Osaka Journal of Mathematics*, **29** S.789–807, 1992.