5 Versicherung auf mehrere Leben

Ziel: Anpassen der bekannten Methoden, um Lebensversicherungen auf zwei oder mehrere Leben kalkulieren zu können.

Beispiele:

- Rentenversicherung auf Versicherungsnehmer und Ehepartner
- Risikolebensversicheurng auf den ersten Tod eines Ehepartners

In dieser Vorlesung nur der Fall der Versicherung auf zwei Leben. Allgemeiner Fall lässt sich davon ableiten.

5.1 Ausscheideordnung und Kommutationswerte

Ansatz: Die Ereignisse „Person x überlebt t Jahre" und „Person y überlebt t Jahre" sind stochastisch unabhängig:

$${}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y$$

Davon abgeleitete Wahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeit, dass in t Jahren mindestens eine Person stirbt:

$${}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_{xy} = 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y$$

Wahrscheinlichkeit, dass in t Jahren beide Personen sterben (Ereignisse sind stochastisch unabhängig):

$${}_tq_{\underline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y$$

Wahrscheinlichkeit, dass in t Jahren noch mindestens eine Person lebt:

$${}_tp_{\underline{xy}} = 1 - {}_tq_{\underline{xy}} = 1 - (1 - {}_tp_x) \cdot (1 - {}_tp_y) = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$$

Wahrscheinlichkeit, dass in t Jahren noch genau eine Person lebt:

$${}_tp^1_{xy} = 1 - {}_tp_{xy} - {}_tq_{\underline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - 2 \cdot {}_tp_{xy}$$

Wahrscheinlichkeit, dass der erste des Paares im Jahr t stirbt:

$${}_{t|}q_{xy} = {}_tp_{xy} - {}_{t+1}p_{xy}$$

Kommutationswerte:

$l_{xy} = l_x \cdot l_y$	Zahl der lebenden Paare
$D_{xy} = l_{xy} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)}$	diskontierte Zahl der lebenden Paare
$N_{xy} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} D_{x+\mu,y+\mu}$	Summe der diskontierten Zahl der lebenden Paare
$S_{xy} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} N_{x+\mu,x+\mu}$	doppelt aufsummierte diskontierte Zahl der lebenden Paare
$d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1,y+1}$	Zahl der Toten in Paaren
$C_{xy} = d_{xy} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)+1}$	diskontierte Zahl der Toten in Paaren
$M_{xy} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} C_{x+\mu,y+\mu}$	Summe der diskontierten Zahl der Toten in Paaren
$R_{xy} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} M_{x+\mu,x+\mu}$	doppelt aufsummierte diskontierte Zahl der Toten in Paaren

Anmerkung:

Wenn nicht ganzzahlige Exponenten beim Diskontsatz vermieden werden sollen kann anstatt $\frac{1}{2}(x+y)$ auch max{x;y} verwendet werden.

Zusammenhang Wahrscheinlichkeiten – Ausscheideordnung:

$$ {}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y = \frac{l_{x+t} \cdot l_{y+t}}{l_x \cdot l_y} = \frac{l_{x+t,y+t}}{l_{xy}} $$

$$ {}_{t|}q_{xy} = {}_tp_{xy} - {}_{t+1}p_{xy} = \frac{l_{x+t,y+t} - l_{x+t+1,y+t+1}}{l_{xy}} = \frac{d_{x+t,y+t}}{l_{xy}} $$

5.2 Leistungsbarwerte typischer Versicherungen

Vorschüssig zahlbare lebenslange verbundene Leibrente auf zwei Leben:

Den beiden versicherten Personen wird ab Abschluss der Versicherung so lange bis der/die erste stirbt eine vorschüssige Rente der Höhe 1 ausgezahlt.

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} {}_{\mu}p_{xy} \cdot v^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} \frac{D_{x+\mu,y+\mu}}{D_{xy}} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}$$

Vorschüssig zahlbare auf n Jahre abgekürzte verbundene Leibrente auf zwei Leben:

Den beiden versicherten Personen wird ab Abschluss der Versicherung so lange bis der/die erste stirbt, aber maximal n Jahre, eine vorschüssige Rente der Höhe 1 ausgezahlt.

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{\mu=0}^{n-1} {}_{\mu}p_{xy} \cdot v^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{D_{x+\mu,y+\mu}}{D_{xy}} = \frac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

Vorschüssig zahlbare lebenslange verbundene Leibrente auf das letzte Leben eines Personenpaares:

Den versicherten Personen wird ab Abschluss der Versicherung so lange noch einer der beiden lebt eine vorschüssige Rente der Höhe 1 ausgezahlt.

$$\ddot{a}_{\underline{xy}} = \sum_{\mu=0}^{\max\{\omega-x;\omega-y\}} {}_{\mu}p_{\underline{xy}} \cdot v^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\max\{\omega-x;\omega-y\}} \left({}_{\mu}p_x + {}_{\mu}p_y - {}_{\mu}p_{xy}\right) \cdot v^{\mu} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

Soll nach dem ersten Tod anstatt 1 nur noch 0 < r <1 an Rente gezahlt werden, dann ändert sich der Barwert in

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\underline{xy}}(r) &= \sum_{\mu=0}^{\max\{\omega-x;\omega-y\}} \left({}_{\mu}p_{xy} + r \cdot {}_{\mu}p^{1}_{xy}\right) \cdot v^{\mu} = \\
&= \sum_{\mu=0}^{\max\{\omega-x;\omega-y\}} \left({}_{\mu}p_{xy} + r \cdot {}_{t}p_x + r \cdot {}_{t}p_y - 2r \cdot {}_{t}p_{xy}\right) \cdot v^{\mu} = \\
&= r \cdot (\ddot{a}_x + \ddot{a}_y) + (1-2r) \cdot \ddot{a}_{xy}
\end{aligned}$$

Risikoversicherung auf zwei verbundene Leben mit n Jahren Laufzeit:

Zum ersten Tod der versicherten Personen x und y nach Abschluss in den kommenden n Jahren wird eine Todesfallleistung in Höhe von 1 ausbezahlt.

$$_{|n}A_{xy} = \sum_{\mu=0}^{n-1} {}_{\mu|}q_{xy} \cdot v^{\mu+1} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{C_{x+\mu,y+\mu}}{D_{xy}} = \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

Kapitallebensversicherung oder gemischte Versicherung auf zwei verbundene Leben:

Zum ersten Tod der versicherten Personen x und y nach Abschluss in den kommenden n Jahren wird eine Todesfallleistung in Höhe von 1 ausbezahlt. Erleben beide versicherte Personen das Versicherungsende, dann wird eine Erlebensfallleistung von 1 fällig.

$$A_{xy:\bar{n}|} = \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

Einseitige Todesfallversicherung:

Bei Tod des Versicherten x vor dem Versicherten y wird eine Todesfallleistung in Höhe von 1 ausbezahlt.

$$A^1_{xy} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} {}_{\mu-1}p_x \cdot q_{x+\mu} \cdot {}_{\mu}p_y \cdot v^{\mu+1} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} \frac{d_{x+\mu} \cdot l_{y+\mu}}{l_{xy}} \cdot v^{\mu+1} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\min\{\omega-x;\omega-y\}} \frac{(l_{x+\mu} - l_{x+\mu+1}) \cdot l_{y+\mu}}{l_{xy}} \cdot v^{\mu+1} = v \cdot \ddot{a}_{xy} - v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1,y}$$

5.3 Beitragsbarwerte

Je nach Vereinbarung mit Versicherungsnehmer ist folgendes möglich:

- $\ddot{a}_{x:\bar{t}|}$ oder $\ddot{a}_{y:\bar{t}|}$, wenn Beiträge gezahlt werden, so lange x bzw. y lebt
- $\ddot{a}_{xy:\bar{t}|}$, wenn Beiträge gezahlt werden so lange beide leben
- $\ddot{a}_{\underline{xy}:\bar{t}|}$, wenn Beiträge gezahlt werden so lange mindesten einer lebt

5.4 Vereinfachte Darstellung

Problem:

Um die Sterbetafeln oder Kommutationswerte in der EDV abzulegen benötigt man anstatt Größenordnung 100 jetzt bei Versicherungen auf zwei Leben 2 · 100 · 100 = 20.000 Einträge. Mit der Anzahl der verbundenen Leben wächst der Speicherbedarf exponentiell an.

Lösung:

Versuche durch geeignete Approximation der Sterbetafel durch ein Sterbegesetz von einem Paar (x,y) auf ein mittleres Alter $\overline{x}$ zu kommen. Dann ließen sich die Barwerte für zwei versicherte Personen durch die bereits bekannten mit nur einer versicherten Person annähern.

Der Ansatz liefert aber nur gute Näherungen, wenn beide Personen der selben Ausscheideordnung angehören, also z.B. nicht bei unterschiedlichem Geschlecht.

Gehören die versicherten Personen zu unterschiedlichen Ausscheideordnungen, dann muss bei der Näherung zusätzlich mit Altersverschiebungen ähnlich der Rueff'schen bei Renten gearbeitet werden.

Approximation durch Gompertz-Makeham:

Für geeignete k, s, g, c > 0 gilt für einen großen Altersbereich von etwa $x \in \{30, 31, \ldots, 69, 70\}$ als gute Näherung

$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}$.

Daraus folgt

$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = s \cdot g^{c^{x+1}-c^x}$ und $p_x \cdot p_y = s^2 \cdot g^{(c^x+c^y)(c-1)}$.

Zur Berechnung des mittleren Alters $\overline{x}$ setzt man an, dass

$(p_{\overline{x}})^2 = s^2 \cdot g^{2c^{\overline{x}}(c-1)} = s^2 \cdot g^{(c^x+c^y)(c-1)} = p_x \cdot p_y$ und damit

$2c^{\overline{x}} = c^x + c^y$ oder

$\overline{x} = \log_c(\frac{1}{2}(c^x + c^y))$ geeignet auf eine natürliche Zahl gerundet.