4 Deckungsrückstellung

Ziel: Verfahren zur Ermittlung des Wertes eines Versicherungsvertrags und der zur Deckung der Risiken nötigen Rückstellungen des Versicherungsunternehmens.

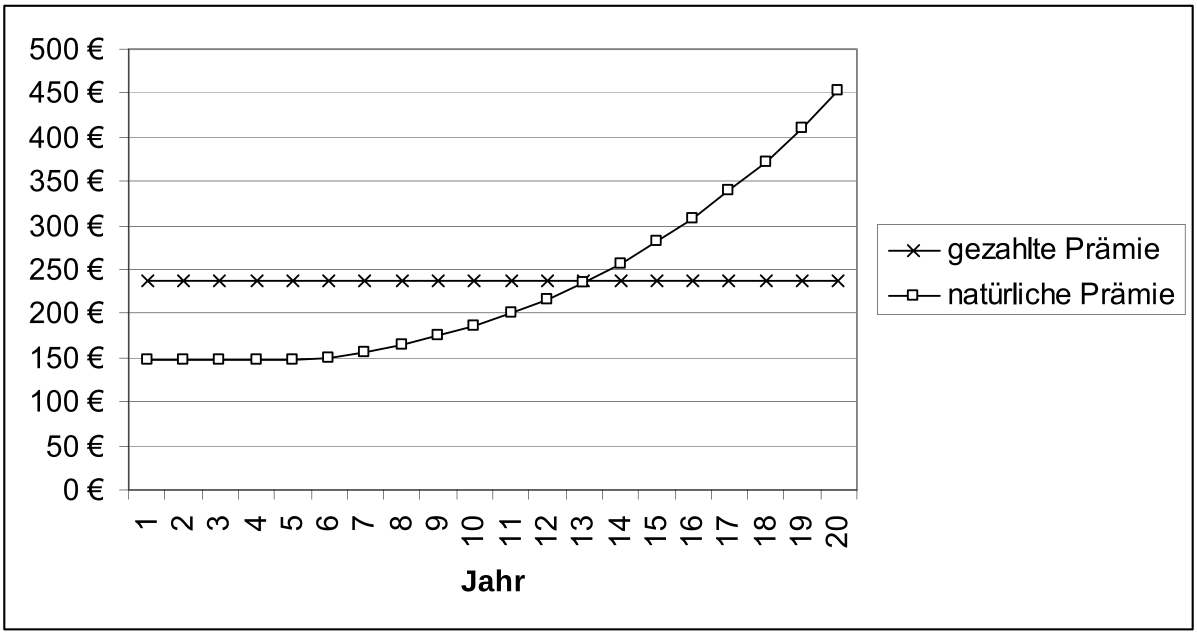
Problem: Prämien werden konstant gezahlt, Risiko ändert sich aber während Laufzeit.

Beispiel: (Risikolebensversicherung nach DAV 1994 T mit 2,75%)

Versicherungsnehmer männlich, 30 Jahre
Laufzeit und Beitragszahlungsdauer 20 Jahre
Versicherungssumme 100.000 €

jährlich zu zahlende Nettoprämie konstant 237,68 €

natürliche Prämie $q_x \cdot 100.000$ € variiert



4.1 Spektren einer Versicherung und Nettodeckungsrückstellung

Im Folgenden sei stets

x das Beitrittsalter der versicherten Person

n die Laufzeit der Versicherung

m bereits verstrichene Jahre seit Versicherungsbeginn

Definition: (Spektrum)

Als **Spektrum** eines zufälligen Zahlungsstroms bezeichnen wir die Funktion S: **N** → **R**, die jedem Zeitpunkt n ∈ **N** die vereinbarte deterministische Zahlung bei Eintritt des entsprechenden Ereignisses zuordnet.

Die Funktion E: **N** → **R** heißt **Erlebensfallspektrum** einer Versicherung, wenn bei der Versicherung nach m Jahren eine Erlebensfallleistung in Höhe von E(m) für alle m = 1, 2, …, n fällig wird.

Die Funktion T: **N** → **R** heißt **Todesfallspektrum** einer Versicherung, wenn bei der Versicherung nach m Jahren eine Todesfallleistung in Höhe von T(m) für alle m = 1, 2, …, n fällig wird.

Die Funktion B: **N** → **R** heißt **Beitragsspektrum** einer Versicherung, wenn bei der Versicherung zu Beginn des m-ten Jahres bei Erleben ein Beitrag in Höhe von B(m) für alle m = 1, 2, …, n fällig wird.

Definition: (Leistungs- und Beitragsbarwert)

Für eine Versicherung mit Spektren E, T und B ist der **Leistungsbarwert** nach m Jahren seit Vertragsbeginn definiert als

$$LB_m^x := \sum_{\mu=0}^{n-m-1} \left({}_{\mu+1}p_{x+m} \cdot E(\mu+m+1) + {}_{\mu}p_{x+m} \cdot q_{x+m+\mu} \cdot T(\mu+m+1) \right) \cdot v^{\mu+1}$$

sowie der **Beitragsbarwert** nach m Jahren seit Vertragsbeginn definiert als

$$BB_m^x := \sum_{\mu=0}^{n-m-1} {}_{\mu}p_{x+m} \cdot B(\mu+m+1) \cdot v^{\mu}$$

Anmerkung:

Wegen des Äquivalenzprinzips gilt offensichtlich

$$LB_0^x = BB_0^x.$$

Beispiel: (Kapitallebensversicherung mit Versicherungssumme 1)

$$\begin{aligned}
LB_m^x &= \sum_{\mu=0}^{n-m-1}\left({}_{\mu+1}p_{x+m} \cdot E(\mu+m+1) + {}_{\mu}p_{x+m} \cdot q_{x+m+\mu} \cdot T(\mu+m+1)\right) \cdot v^{\mu+1} = \\
&= \sum_{\mu=0}^{n-m-1} {}_{\mu}p_{x+m} \cdot q_{x+m+\mu} \cdot v^{\mu+1} + {}_{\mu+1}p_{x+m} \cdot v^{n-m} = \\
&= \frac{M_{x+n} - M_{x+m} + D_{x+n}}{D_{x+m}} \\
&= A_{x+m:\overline{n-m}|}
\end{aligned}$$

Für vorher bestimmte Jahresprämie P gemäß des Äquivalenzprinzips

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

gilt außerdem

$$\begin{aligned}
BB_m^x &= \sum_{\mu=0}^{n-m-1} {}_{\mu}p_{x+m} \cdot P \cdot v^{\mu} = P \cdot \frac{N_{x+n} - N_{x+m}}{D_{x+m}} = \\
&= P \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}
\end{aligned}$$

Satz:

Gilt für eine Versicherung mit Spektren E, T und B, dass für alle m = 1, 2, …, n die Gleichung

$$LB_m^x = BB_m^x$$

erfüllt ist, dann ist die Zahlung natürlicher Beiträge vereinbart.

Beweis: Durch Induktion über m mit Beginn m = n – 1. □

Definition: (Prospektive Deckungsrückstellung)

Die **prospektive Deckungsrückstellung** zum Zeitpunkt m eines Vertrags mit Spektren E, T und B ist definiert als

$${}_mV_x^{pro} := LB_m^x - BB_m^x$$

Anmerkung:

Die prospektive Deckungsrückstellung ist der Barwert (abgezinst mit dem Rechnungszins) der zukünftigen Leistungen, die bereits durch Beitragszahlungen durch den Versicherungsnehmer gedeckt sind.

Ist die prospektive Deckungsrückstellung **größer 0**, so bestehen Reserven. Der Versicherungsnehmer hat in der Vergangenheit mehr Beiträge eingezahlt als für die Deckung der Leistungen nötig war.

Ist die prospektive Deckungsrückstellung **kleiner 0**, so hatte der Versicherungsnehmer in der Vergangenheit Anspruch auf Leistungen die höher waren als seine Beiträge. Kündigt der Versicherungsnehmer in so einer Situation, so entsteht für das Versicherungsunternehmen ein Defizit.

Definition: (Leistungs- und Beitragsendwert)

Für eine Versicherung mit Spektren E, T und B ist der **Leistungsendwert** nach m Jahren seit Vertragsbeginn definiert als

$$LE_m^x := \sum_{\mu=0}^{m-1} \left({}_{\mu+1}p_x \cdot E(\mu+1) + {}_{\mu}p_x \cdot q_{x+\mu} \cdot T(\mu+1) \right) \cdot \frac{r^{m-1-\mu}}{{}_mp_x}$$

sowie der **Beitragsendwert** nach m Jahren seit Vertragsbeginn definiert als

$$BE_m^x := \sum_{\mu=0}^{m-1} {}_{\mu}p_x \cdot B(\mu+1) \cdot \frac{r^{m-\mu}}{{}_mp_x}$$

Definition: (Retrospektive Deckungsrückstellung)

Die **retrospektive Deckungsrückstellung** zum Zeitpunkt m eines Vertrags mit Spektren E, T, und B ist definiert als

$${}_mV_x^{retro} := BE_m^x - LE_m^x$$

Satz: (Gleichheit der Berechnungsmethoden der Deckungsrückstellung)

Sei eine Versicherung mit Spektren E, T und B gegeben, dann gilt für beliebige $0 \le m \le n$

$${}_{m}V_x^{retro} = {}_{m}V_x^{pro}.$$

Beweis: Wegen der möglichen Zerlegung jedes Barwerts zu Versicherungsbeginn in einen retrospektiven und einen prospektiven zu einem Zeitpunkt $0 \le m \le n$ in der Form

$L_0 = v^m \cdot {}_{m}p_x \cdot LE_m^x + v^m \cdot {}_{m}p_x \cdot LB_m^x$ und

$$B_0 = v^m \cdot {}_{m}p_x \cdot BE_m^x + v^m \cdot {}_{m}p_x \cdot BB_m^x$$

und der Gleichheit von L_0 und B_0 gemäß des Äquivalenzprinzips folgt

$$v^m \cdot {}_{m}p_x \cdot (BE_m^x - LE_m^x) = v^m \cdot {}_{m}p_x \cdot (LB_m^x - BB_m^x)$$

und damit die Behauptung. □

Anmerkung:

Wichtig für den Beweis ist, dass die Prämien nach den gleichen Rechnungsgrundlagen ermittelt werden wie die Leistungsbarwerte und damit das Äquivalenzprinzip anwendbar ist. Nach der Deregulierung ist es aber prinzipiell möglich die Leistungen sicherer als nötig zu reservieren. In diesem Fall gilt der Satz nicht mehr.

Für die Bilanzierung ist auf jeden Fall die prospektive der retrospektiven Methode vorzuziehen. Der retrospektive Ansatz einer Deckungsrückstellung in der Versicherungsbilanz ist nach § 341f Abs.1 HGB nur dann zulässig, wenn der Wert der zukünftigen Verpflichtungen oder Beiträge nicht ermittelt werden kann.

Der Index „retro“ und „pro“ wird üblicherweise weggelassen, wenn beide Methoden äquivalent sind, also insbesondere wenn die Prämien über das Äquivalenzprinzip bestimmt sind.

Satz: (Beitragsdifferenzformel)

Sei eine Versicherung mit Spektren E und T gegeben und seien P_x und P_{x+m} für beliebige $0 \le m \le n$ die nach dem Äquivalenzprinzip kalkulierten Prämien für die Versicherung mit Eintrittsalter x bzw. x+m, dann gilt für die Beitragsspektren $B_x \equiv P_x$ und $B_{x+m} \equiv P_{x+m}$

$${}_mV_x = (P_{x+m} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

Beweis: Da ein konstanter Beitrag der Höhe P_x gezahlt wird, gilt

$${}_mV_x := LB_m^x - BB_m^x = LB_m^x - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}.$$

Wegen der Berechnung der Prämie P_{x+m} gemäß der Äquivalenzgleichung gilt außerdem

$$LB_m^x = LB_0^{x+m} = P_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}.$$

Damit folgt die Behauptung. □

4.2 Nettodeckungsrückstellung für typische Versicherungen

Die Altersrente:

Nach einer Wartezeit von n Jahren (die sog. Aufschubzeit) ohne Erlebens- und Todesfallleistung, in der $1 \le t \le n$ Jahre Beiträge gezahlt werden, wird eine lebenslange, jährliche Rente der Höhe 1 gewährt.

$$E(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } 1 \le \mu < n \\ 1 & \text{, falls } n \le \mu \le \omega - x \end{cases}$$

$T(\mu) = 0$ für alle $1 \le \mu \le \omega - x$

$$B(\mu) = \begin{cases} P = \dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}} = \dfrac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} & \text{, falls } 1 \le \mu \le t \\ 0 & \text{, falls } t < \mu \end{cases}$$

Daraus ergibt sich für das Deckungskapital nach prospektiver Berechnung im Fall $0 \le m < t$

$$ {}_mV_x = {}_{n-m|}\ddot{a}_{x+m} - P \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+m}} - \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+t}}{D_{x+m}}, $$

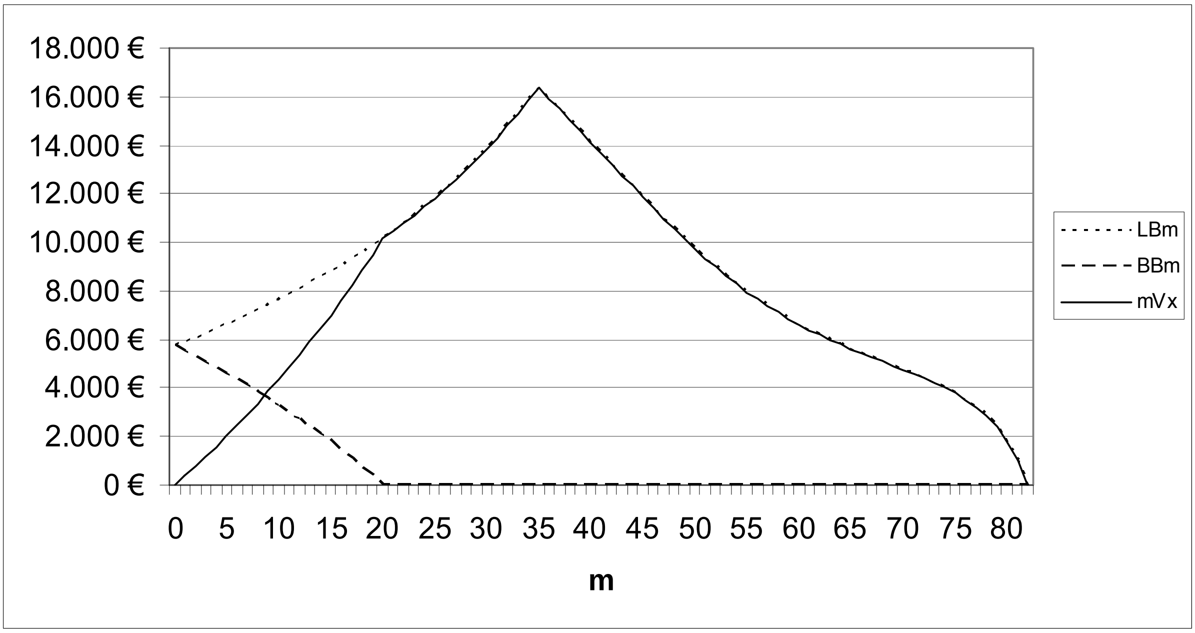
für $t \le m < n$

$$ {}_mV_x = {}_{n-m|}\ddot{a}_{x+m} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+m}} $$

und für $m \ge n$

$$ {}_mV_x = \ddot{a}_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}. $$

Konkreter Verlauf für x = 30, t = 20, n = 35 und einer Jahresrente von 1.000 € nach der Tafel DAV 1994 RM mit Rechnungszins 2,75 %:



Die reine Risikoversicherung:

Während der Vertragslaufzeit von n Jahren wird im Todesfall eine Leistung von 1 fällig. Erlebensfallleistungen werden nicht gewährt. Beitragszahlungsdauer ist $1 \leq t \leq n$.

$E(\mu) = 0$ für alle $1 \leq \mu \leq n$

$T(\mu) = 1$ für alle $1 \leq \mu \leq \nu$

$$B(\mu) = \begin{cases} P = \dfrac{{}_{|n}A_x}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} & \text{, falls } 1 \leq \mu \leq t \\ 0 & \text{, falls } t < \mu \end{cases}$$

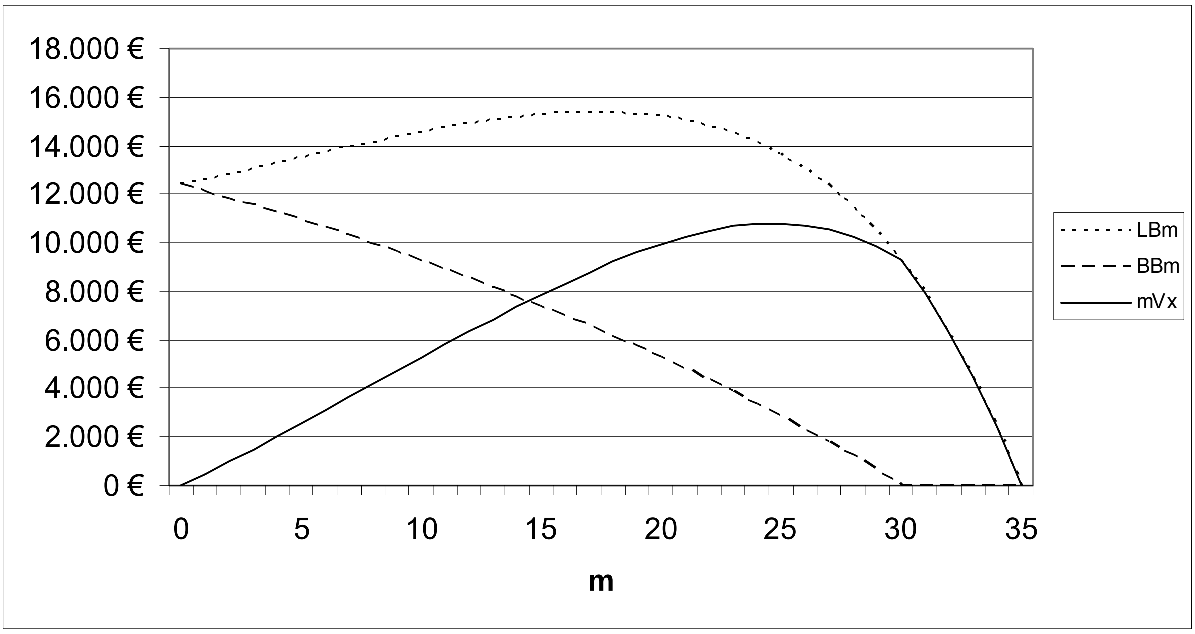
Daraus ergibt sich für das Deckungskapital nach prospektiver Berechnung im Fall $0 \leq m < t$

$${}_mV_x = {}_{|n-m}A_{x+m} - P \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m|}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_{x+m}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+t}}{D_{x+m}},$$

und für $t \leq m \leq n$

$${}_mV_x = {}_{|n-m}A_{x+m} = \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_{x+m}}.$$

Konkreter Verlauf für x = 30, t = 30, n = 35 und einer Versicherungssumme von 100.000 € nach der Tafel DAV 1994 TM mit Rechnungszins 2,75 %:



Die Kapitallebensversicherung:

Während der Vertragslaufzeit von n Jahren wird im Todesfall eine Leistung von 1 und zum Versicherungsende eine Erlebensfallleistungen von 1 fällig. Beitragszahlungsdauer ist $1 \le t \le n$.

$$E(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } 1 \le \mu < n \\ 1 & \text{, falls } \mu = n \end{cases}$$

$T(\mu) = 1$ für alle $1 \le \mu \le \nu$

$$B(\mu) = \begin{cases} P = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} & \text{, falls } 1 \le \mu \le t \\ 0 & \text{, falls } t < \mu \end{cases}$$

Daraus ergibt sich für das Deckungskapital nach prospektiver Berechnung im Fall $0 \le m < t$

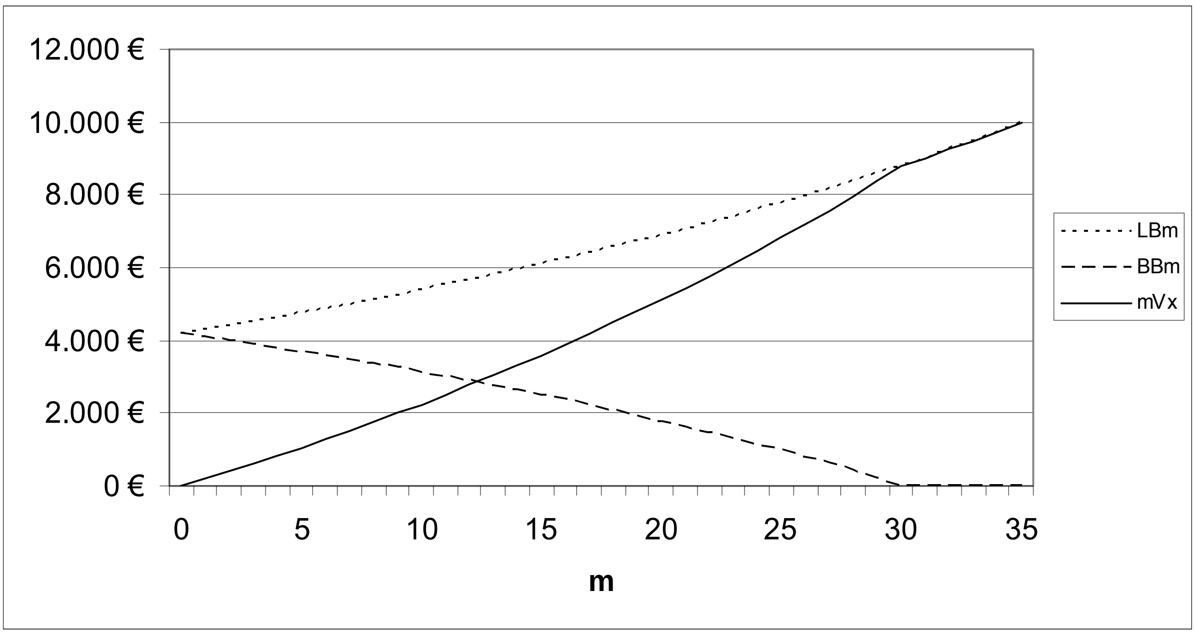
$$_mV_x = A_{x+m:\overline{n-m}|} - P \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} =$$

$$= \frac{M_{x+m} - M_{x+n} + D_{x+m}}{D_{x+m}} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+m}}{N_x - N_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+t}}{D_{x+m}},$$

und für $t \le m \le n$

$$_mV_x = A_{x+m:\overline{n-m}|} = \frac{M_{x+m} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+m}}.$$

Konkreter Verlauf für x = 30, t = 30, n = 35 und einer Versicherungssumme von 10.000 € nach der Tafel DAV 1994 TM mit Rechnungszins 2,75 %:



4.3 Rekursionsformel, Spar- und Risikobeitrag

Ziel: Jährliche Veränderung der Deckungsrückstellung soll genauer untersucht werden.

Ansatz: Der jährliche Kapitalfluss muss ausgeglichen sein:

Die Summe aus der vorhandenen Deckungsrückstellung zu Beginn des Jahres und der Beitragseinnahme entsprechend verzinst muss die Summe aus der Deckungsrückstellung am Ende des Jahres und der zu erwartenden Leistungen sein.

$$({}_{m-1}V_x + B(m)) \cdot (1+i) = p_{x+m-1} \cdot {}_mV_x + p_{x+m-1} \cdot E(m) + q_{x+m-1} \cdot T(m).$$

Löst man nach ${}_mV_x$ auf, so ergibt sich:

$${}_mV_x = \frac{1}{p_{x+m-1}} \cdot ({}_{m-1}V_x + B(m)) \cdot (1+i) - E(m) - \frac{q_{x+m-1}}{p_{x+m-1}} \cdot T(m)$$

oder durch Kommutationswerte ausgedrückt

$${}_mV_x = \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \cdot ({}_{m-1}V_x + B(m)) - E(m) - \frac{C_{x+m-1}}{D_{x+m}} \cdot T(m).$$

Zusammen mit ${}_0V_x = 0$ lässt sich mit dieser **Rekursionsformel** der Verlauf der Deckungsrückstellung über die gesamte Laufzeit der Versicherung ermitteln.

Löst man die Gleichung des Kapitalflusses nach B(m) auf, so erhält man eine Zerlegung des gezahlten Beitrags:

$$\begin{aligned}
B(m) &= \frac{p_{x+m-1}}{1+i}\cdot({}_mV_x + E(m)) + \frac{q_{x+m-1}}{1+i}\cdot T(m) - {}_{m-1}V_x = \\
&= (1-q_{x+m-1})\cdot v\cdot({}_mV_x + E(m)) + q_{x+m-1}\cdot v\cdot T(m) - {}_{m-1}V_x = \\
&= \underbrace{v\cdot({}_mV_x + E(m)) - {}_{m-1}V_x}_{=:B^S(m)} + \underbrace{q_{x+m-1}\cdot v\cdot(\underbrace{T(m) - {}_mV_x - E(m)}_{=:R(m)})}_{=:B^R(m)}
\end{aligned}$$

oder durch Kommutationswerte ausgedrückt

$$B(m) = \underbrace{v\cdot({}_mV_x + E(m)) - {}_{m-1}V_x}_{=:B^S(m)} + \underbrace{\frac{C_{x+m-1}}{D_{x+m-1}}\cdot v\cdot(\underbrace{T(m) - {}_mV_x - E(m)}_{=:R(m)})}_{=:B^R(m)}$$

Bezeichnungen:

$B^S(m)$ — **Sparbeitrag** im m-ten Jahr

Teil des Beitrags, der zur Erhöhung der Deckungsrückstellung und zur Sicherung der Erlebensfallleistung zum Ende des m-ten Jahres dient, auf den Jahresbeginn abgezinst

$R(m)$ — **risikiertes Kapital** im m-ten Jahr

zu erbringende Todesfallleistung abzüglich dem bereits angesparten Kapital am Ende des m-ten Jahres

$B^R(m)$ — **Risikobeitrag** im m-ten Jahr

Teil des Beitrags, der für die Deckung des Todesfallrisikos zum Ende des m-ten Jahres aufgebracht werden muss, auf den Jahresbeginn abgezinst

Beispiel: (Spar- und Risikobeitrag einer Kapitallebensversicherung)

Für m < n ist bei einer Kapitallebensversicherung die Todesfallleistung konstant T(m) = 1, also

$B^S(m) = v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x$

und

$B^R(m) = q_{x+m-1} \cdot v \cdot (1 - {}_mV_x)$.

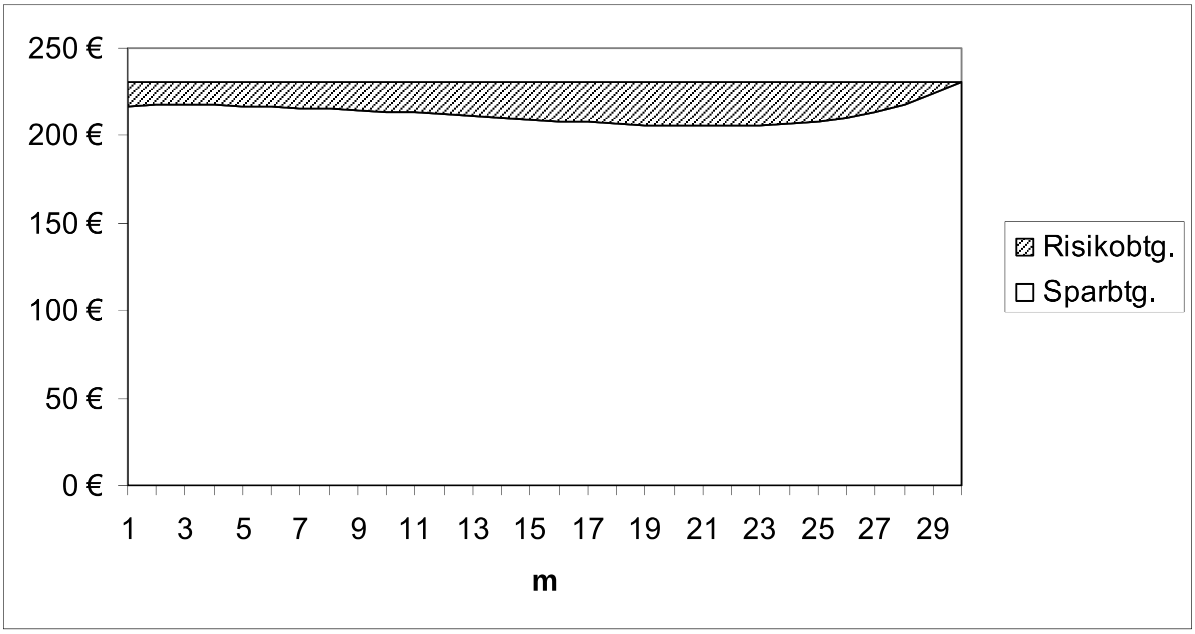
Für m = n ist die Deckungsrückstellung ${}_nV_x = 1$ und sie wird vollständig als Erlebensfallleistung ausgezahlt

$B^S(n) = v - {}_{m-1}V_x$

und

$B^R(n) = 0$.

Konkreter Verlauf des Spar- und Risikobeitrags für x = 30, t = n = 30 und einer Versicherungssumme von 10.000 € nach der Tafel DAV 1994 TM mit Rechnungszins 2,75 % (ergibt einen Jahresbeitrag von 230,99 €):



4.4 Gezillmerte und ausreichende Deckungsrückstellung

4.4.1 Zillmerreserve

Gemäß dem Ansatz der Zillmerkosten α^Z werden diese sofort zu Beginn der Versicherung verrechnet.

Vergleich man die ungezillmerte Prämie P mit der gezillmerten Prämie P^Z, so gilt gemäß des Äquivalenzprinzips für eine Versicherung mit Leistungsbarwert A:

$$P^Z \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}|} = A + \alpha^Z$$

und damit

$$P^Z = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}} + \frac{\alpha^Z}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}} = P + \frac{\alpha^Z}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}.$$

Auswirkung auf die Deckungsrückstellung:

Das Todesfall- und Erlebensfallspektrum bleibt durch die Zillmerung unverändert und damit auch der Leistungsbarwert LB_m^x.

Das Beitragsspektrum erhöht sich um einen konstanten, additiven Term für alle $1 \le m \le t$ auf

$$B^Z(m) = P^Z = B(m) + \frac{\alpha^Z}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}}$$

und es ergibt sich ein entsprechend modifizierter Beitragsbarwert $BB_m^{Z,x}$.

Durch die Berücksichtigung der Zillmerung ergibt sich für die gezillmerte Deckungsrückstellung

$${}_mV_x^Z = LB_m^x - BB_m^{Z,x} = \begin{cases} {}_mV_x - \frac{\alpha^Z}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} & \text{, für } m < t \\ {}_mV_x & \text{, für } m \ge t \end{cases}$$

Sonderfall: m = 0

$${}_0V_x^Z = {}_0V_x - \frac{\alpha^Z}{\ddot{a}_{x:\bar{t}|}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}|} = 0 - \alpha^Z$$

Die gezillmerte Deckungsrückstellung ist zu Beginn immer gleich den negativen Zillmerkosten.

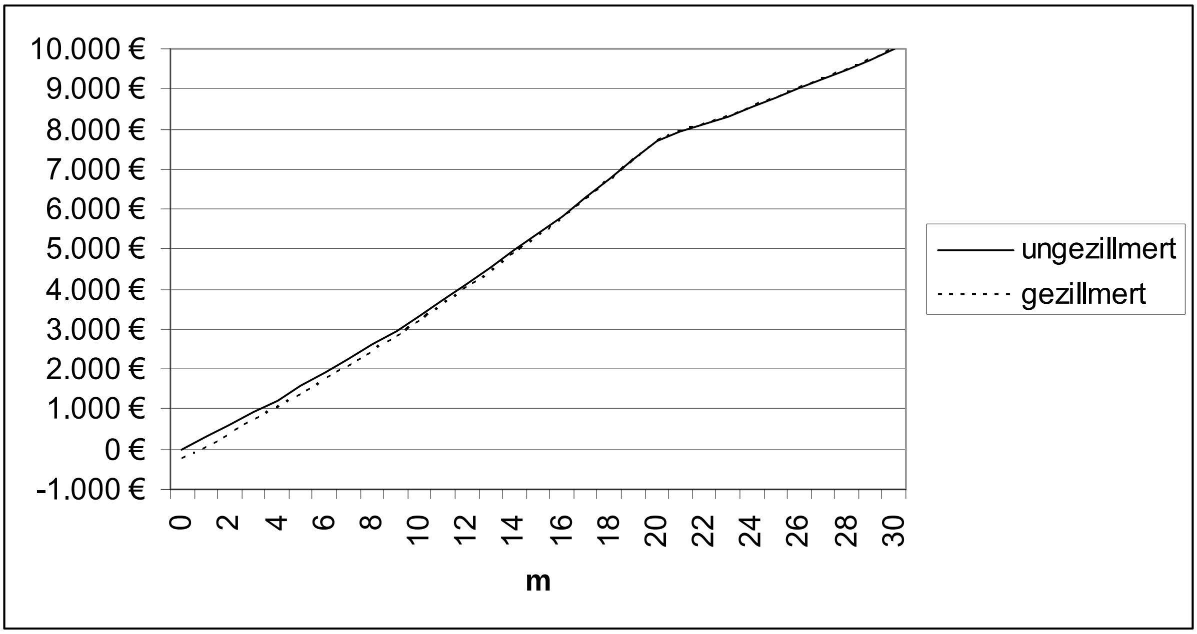
Beispiel: (Zillmerreserve einer Kapitallebensversicherung)

Konkreter Verlauf der ungezillmerten und gezillmerten Deckungsrückstellung für x = 30, t = 20, n = 30, einer Zillmerung von 40‰ der Beitragssumme und einer Versicherungssumme von 10.000 € nach der Tafel DAV 1994 TM mit Rechnungszins 2,75 %

Jahresbeitrag ungezillmert: 301,35 €

Jahresbeitrag mit 40‰ der Beitragssumme gezillmert: 317,90 €

$${}_0V_{30}^Z = -254{,}32\ €$$



4.4.2 Ausreichende Deckungsrückstellung

Berücksichtigt man neben den Zillmerkosten auch noch alle weiteren Kosten, so spricht man bei der sich daraus ergebenden Deckungsrückstellung von der **ausreichenden Deckungsrückstellung**.

Definition: (Kostenspektrum und -Barwert)

Die Funktion Γ: **N** → **R** heißt **Kostenspektrum** einer Versicherung, wenn bei der Versicherung zu Beginn des m-ten Jahres bei Erleben α^γ-, β- und γ-Kosten in Höhe von $\Gamma(m)$ für alle m = 1, 2, …, n fällig werden.

Der **Kostenbarwert** sei analog des Beitragsbarwertes definiert als

$$\Gamma B_m^x := \sum_{\mu=0}^{n-m-1} {}_\mu p_{x+m} \cdot \Gamma(\mu + m + 1) \cdot v^\mu$$

Anmerkung:

Da β-Kosten nur anfallen, wenn auch Beiträge gezahlt werden, und diese definitionsgemäß immer kleinergleich des Beitrags sind, könnte man sie genau so im Beitragsbarwert berücksichtigen. Wegen des Saldierungsverbots der Bilanzierung werden die Inkassokosten aber auch immer separat geführt.

Definition: (ausreichende Deckungsrückstellung)

Die **ausreichende Deckungsrückstellung** zum Zeitpunkt m eines Vertrags mit Spektren E, T, B und Γ ist definiert als

$${}_mV_x^a := LB_m^x + \Gamma B_m^x - BB_m^x$$

Rekursionsformel mit Kosten:

Die Summe aus der vorhandenen Deckungsrückstellung zu Beginn des Jahres und der Beitragseinnahme **abzüglich der Kosten** entsprechend verzinst muss die Summe aus der Deckungsrückstellung am Ende des Jahres und der zu erwartenden Leistungen sein.

$$\begin{aligned}&({}_{m-1}V_x^a + B(m) - \Gamma(m)) \cdot (1+i) = \\ &\quad = p_{x+m-1} \cdot {}_mV_x^a + p_{x+m-1} \cdot E(m) + q_{x+m-1} \cdot T(m)\end{aligned}.$$

Löst man nach ${}_mV_x^a$ auf, so ergibt sich:

$${}_mV_x^a = \frac{1}{p_{x+m-1}} \cdot ({}_{m-1}V_x^a + B(m) - \Gamma(m)) \cdot (1+i) - E(m) - \frac{q_{x+m-1}}{p_{x+m-1}} \cdot T(m)$$

oder durch Kommutationswerte ausgedrückt

$${}_mV_x = \frac{D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \cdot ({}_{m-1}V_x + B(m) - \Gamma(m)) - E(m) - \frac{C_{x+m-1}}{D_{x+m}} \cdot T(m).$$

Zusammen mit ${}_mV_x^a = -\alpha^Z$ lässt sich mit dieser **Rekursionsformel** der Verlauf der Deckungsrückstellung über die gesamte Laufzeit der Versicherung ermitteln.

Beitragszerlegung mit Kosten:

Löst man die Gleichung des Kapitalflusses nach B(m) auf, so erhält man eine Zerlegung des gezahlten Beitrags:

$$B(m) = B^S(m) + B^R(m) + \underbrace{\Gamma(m)}_{=:B^K(m)}$$

Bezeichnungen:

$B^K(m)$ **Kostenbeitrag** im m-ten Jahr

Teil des Beitrags bzw. der Deckungsrückstellung, der für Inkasso- und Verwaltungskosten aufgewendet wird

Kostenreserve:

Endet die Beitragszahlung vorzeitig, so müssen die Kosten aus der Deckungsrückstellung getilgt werden. Die Rückstellung für die zukünftigen Aufwände an Kosten wird durch den Verwaltungskostenbarwert gebildet. Sind die Verwaltungskosten für einen Vertrag etwa konstant Γ, dann gilt

$$\Gamma B_m^x = \begin{cases} \Gamma \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} - \Gamma \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} & \text{, für } m < t \\ \Gamma \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} & \text{, für } m \geq t \end{cases}$$

Beispiel: (Beitragszerlegung einer Kapitallebensversicherung)

Konkreter Verlauf des Spar-, Risiko- und Kostenbeitrags für x = 30, t = 20 und n = 30 und einer Versicherungssumme von 10.000 € nach der Tafel DAV 1994 TM mit Rechnungszins 2,75 %.

Als Kosten werden berücksichtigt:

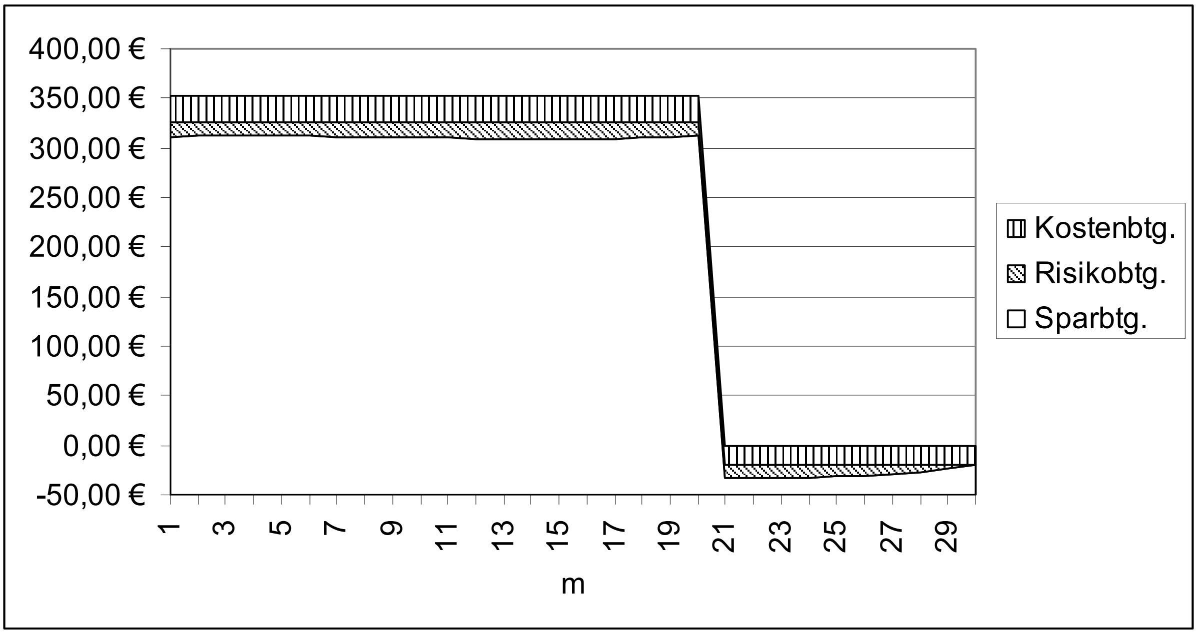
α: 40‰ der Beitragssumme
β: 2% des Beitrags
γ: 2‰ der Versicherungssumme

Als ausreichende Jahresprämie ergibt sich 352,87 €

Nach Beitragszahlungsende im 20. Jahr muss eine Kostenreserve in Höhe von

$$\gamma \cdot VS \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = 20 \cdot \ddot{a}_{50:\overline{10}|} = 170{,}88$$

zurückbehalten werden, aus der die zukünftigen Verwaltungskosten von jährlich 20 € getilgt werden.



4.5 Bilanzrückstellung

Für den Jahresabschluss der Versicherung muss die Deckungsrückstellung aller Verträge zum 31.12. ermittelt werden. Da der Versicherungsbeginn nur zufällig der 01.01. ist, muss dazu linear interpoliert werden.

Ist die Hauptfälligkeit eines Vertrags zum Ersten des Monats h $\in$ {1, …, 12} im m-ten Versicherungsjahr, dann ist die Bilanzrückstellung für den auf die m-te Hauptfälligkeit folgenden Jahresabschluss definiert als

$$ {}_mV_x^B = {}_mV_x^a + \frac{13-h}{12} \cdot ({}_{m+1}V_x^a - {}_mV_x^a) = \frac{h-1}{12} \cdot {}_mV_x^a + \frac{13-h}{12} \cdot {}_{m+1}V_x^a $$

Anmerkungen:

- Die Bilanzrückstellung bezieht sich immer auf die ausreichende Deckungsrückstellung inklusive ggf. zu bildender Verwaltungskostenrückstellungen (§341f (1) und (2) HGB, §25 RechVersV).
- Wegen des Vorsichtsprinzips der HGB-Bilanz dürfen negative Rückstellungen nicht mit positiven verrechnet werden, d.h. sie werden auf 0 gesetzt.
- Negative Bilanzrückstellungen dürfen allerdings aktiviert werden (d.h. als Forderungen gegenüber dem Kunden auf die Aktiv-Seite gestellt werden), wenn sie aus der Zillmerung resultieren (§15 (1) RechVersV).
- Die versicherungsmathematischen Methoden und Berechnungsgrundlagen bei der Ermittlung der Bilanzrückstellung müssen im Anhang der Bilanz veröffentlicht werden (§52 RechVersV).

4.6 Garantiewerte

Regelung für Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung gemäß §§ 174 und 175 VVG:

- Die Berechnung der beitragsfreien Versicherungsleistung ist mit den **Rechnungsgrundlagen der Prämienkalkulation** vorzunehmen.
- Für den Fall, dass die vereinbarte **Mindestversicherungssumme** oder **-rente** nicht erreicht wird, hat der Versicherer den auf die Versicherung entfallenden Rückkaufswert zu erstatten.
- Die prämienfreie Leistung ist auf den Schluss der laufenden Versicherungsperiode **unter Berücksichtigung von Prämienrückständen** zu berechnen.
- Der Versicherer ist zu einem **Stornoabzug** nur berechtigt, wenn dieser vereinbart und angemessen ist.

Regelungen über den Rückkaufswert gemäß § 176 VVG:

- Ein Rückkaufswert wird fällig bei **Aufhebung des Vertrags** durch Rücktritt, Kündigung oder Anfechtung

  Voraussetzung: Es liegt eine Kapitalversicherung auf den Todesfall der Gestalt vorliegt, dass der Eintritt der Verpflichtung des Versicherers zur Zahlung des vereinbarten Kapitals gewiss ist. Bei solchen Versicherungen wird der Rückkaufswert auch im Fall des Selbstmordes der versicherten Person fällig.
- Der Rückkaufswert ist nach den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik für den Schluss der laufenden Versicherungsperiode als **Zeitwert** (Deckungsrückstellung + Gewinne) der Versicherung zu berechnen. **Prämienrückstände** werden vom Rückkaufswert abgesetzt.
- Der Versicherer ist zu einem **Stornoabzug** nur berechtigt, wenn dieser vereinbart und angemessen ist.

Gründe für Stornoabzug:

- Erstattung noch nicht getilgter Aufwände bei Vertragsabschluss
- Verlust durch ungeplante Auflösung langfristiger Kapitalanlagen
- negative Risikoauslese kompensieren

Beispiel: (Beitragsfreistellung bzw. Rückkauf einer Kapitallebensversicherung)

Für eine Kapitallebensversicherung mit den Daten x = 30, n = t = 30 und einer Versicherungssumme von 10.000 € nach der Tafel DAV 1994 TM mit Rechnungszins 2,75 % soll nach 20 Jahren die beitragsfreie Versicherungssumme und der Rückkaufswert bestimmt werden.

Aus den Vorgaben ergibt sich:

Jahresnettoprämie: P = 230,99 €

Deckungsrückstellung nach 20 Jahren: ${}_{20}V_{30}$ = 5.739,82 €

Soll die Versicherung die restlichen 10 Jahre prämienfrei geführt werden, so muss die neue Versicherungssumme S gemäß des Äquivalenzprinzips bestimmt werden (mit Stornoabzug s(m)):

$$s(m) \cdot {}_{m}V_{x} = S \cdot A_{x+m:\overline{n-m}|}$$

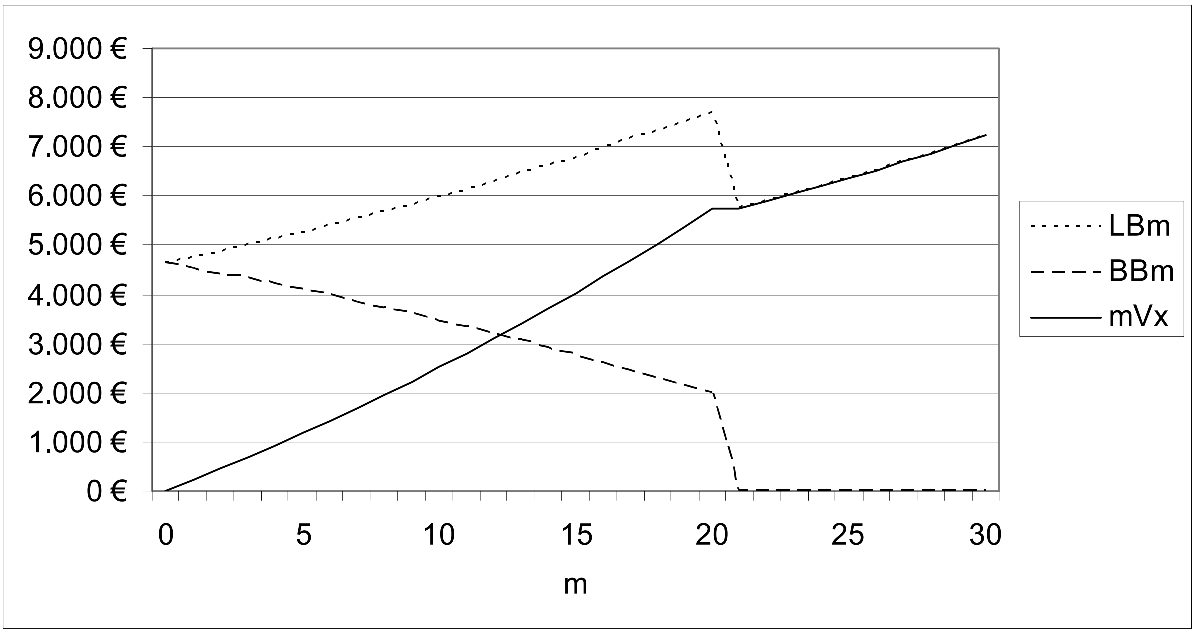
also etwa für einen Stornoabzug s(20) = 95%

$$S = \frac{s(m) \cdot {}_{m}V_{x}}{A_{x+m:\overline{n-m}|}} = \frac{0{,}95 \cdot 5.739{,}82\text{ €}}{0{,}752044} = 7.250{,}68\text{ €}.$$

Entsprechend ermittelt sich der Rückkaufswert zu

R = s(m) · ${}_{m}V_{x}$ = 0,95 · 5.739,82 € = 5.452,83 €.

Verlauf der Deckungsrückstellung bei einer Beitragsfreistellung nach 20 Jahren:



4.7 Technische Vertragsänderungen

Neben Beitragsfreistellung und Kündigung werden Versicherungsnehmern häufig noch andere Vertragsänderungen ermöglicht.

Definition:

Eine **technische Vertragsänderung** ist eine Vertragsänderung, bei der sich mindestens eines der folgenden Daten ändert

- Prämie
- Summe bzw. Rente
- Tarif
- Geburtsdatum der versicherten Person(en)
- Ablauf der Beitragszahlungsdauer
- Ablauf der Versicherungsdauer
- Kombination von Prämienänderung mit Ein-/Auszahlung der Deckungsrückstellung.

Typische technische Vertragsänderungen sind etwa Erhöhungen und Beitragsdynamiken, Reduzierungen, Verlängerungen, Verkürzungen, Wiederinkraftsetzungen, Verrechnung von Werten.

4.7.1 Methoden der Durchführung

Die vier folgenden Methoden und deren Kombination sind allgemein üblich, um die Kundenwünsche mit den mathematischen, betriebswirtschaftlichen und rechtlichen Anforderungen in Übereinstimmung zu bringen:

1. Vertragsänderung durch Neuabschluss

Der ursprüngliche Vertrag wird so belassen, wie er sich zum Änderungstermin darstellt. Technisch wird ein zweiter Vertrag hinzugefügt, der eigentlich auch alleine abschließbar wäre und zusammen mit dem ursprünglichen Vertragsteil endet (selbständige Nachversicherung). Der Versicherungsnehmer sieht bei seinem neuen Vertrag nur eine Prämie und einen Rückkaufswert.

Nur sinnvoll etwa bei Erhöhung, Wiederinkraftsetzung, Zuzahlungen.

2. Vertragsänderung durch Zuzahlung zur Deckungsrückstellung

Hierbei wird für den geänderten Vertrag entweder die Versicherungssumme zur gegebenen Prämie oder die neue Prämie zur gegebenen Versicherungssumme gerechnet. Die Differenz der Deckungsrückstellung zum Änderungstermin wird vom Versicherungsnehmer nachgezahlt.

3. Vertragsänderung durch Deckungskapitalvergleich („Beginnverlegung“)

Für den geänderten Vertrag wird ein hypothetischer Beginn gesucht, so dass die Deckungsrückstellungen des alten und neuen Vertragszustandes zum Änderungstermin gleich sind.

4. Vertragsänderung durch „konstruktiven Beitrag“

Durch unmittelbare Anwendung des Äquivalenzprinzips auf den neuen Vertrag werden zum Änderungstermin die Leistungen und Gegenleistungen verglichen. Hieraus wird dann die neue Prämie/Summe gerechnet.

4.7.2 Beispiele für Änderungen

Gegeben sei bei den folgenden Beispielen eine Kapitallebensversicherung mit den Daten x = 30, n = t = 30, Todes- und Erlebensfallleistung S = 10.000 € kalkuliert nach der Sterbetafel DAV 1994 TM mit 2,75 % Rechnungszins.

Es werden außerdem folgende Kosten berücksichtigt:

α: 40‰ der Beitragssumme
β: 2% des Beitrags
γ: 2‰ der Versicherungssumme
nachträglich aufgeschlagene Stückkosten: 20 €

Damit ist:

$$P \cdot \ddot{a}_{30:\overline{30}|} = S \cdot A_{30:\overline{30}|} + P \cdot \beta \cdot \ddot{a}_{30:\overline{30}|} + S \cdot \gamma \cdot \ddot{a}_{30:\overline{30}|} + 30 \cdot \alpha \cdot P$$

also

$$P = \frac{A_{30:\overline{30}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}|} \cdot (1-\beta) - 30 \cdot \alpha} \cdot S = 272{,}76\text{ €}$$

$$P^a = P + \text{Stückkosten} = 292{,}76\text{ €}$$

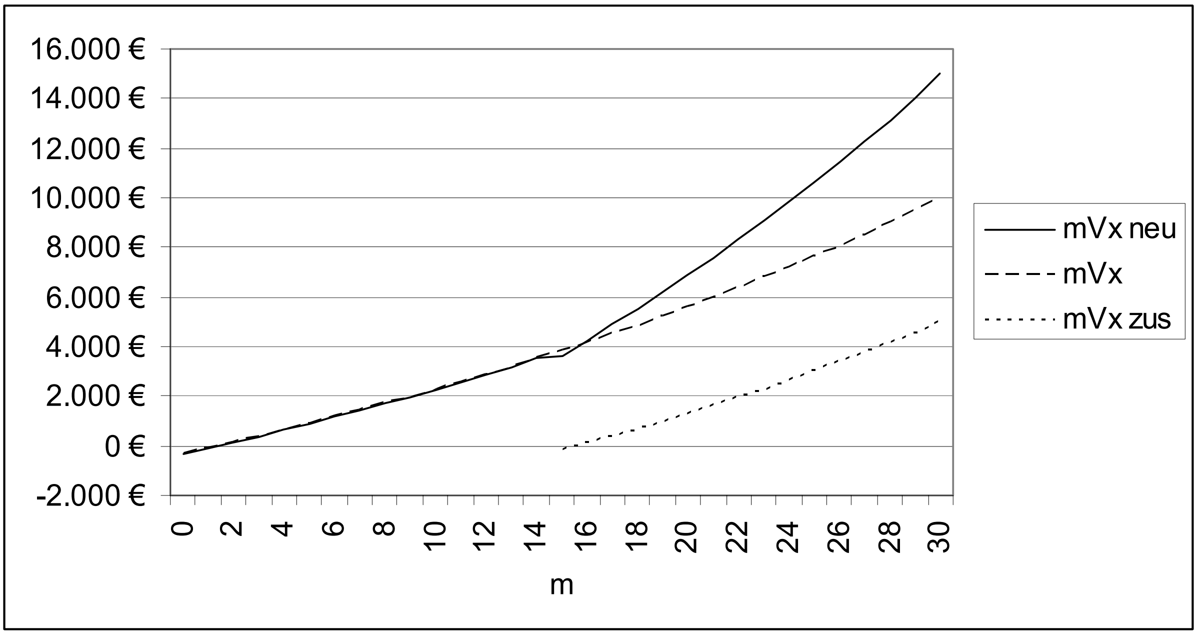
Die technische Änderung soll jeweils nach 15 Jahren durchgeführt werden. Es ergibt sich zu diesem Zeitpunkt eine gezillmerte Deckungsrückstellung in Höhe von

$${}_{15}V_{30}^a = S \cdot A_{45:\overline{15}|} + (P \cdot \beta + S \cdot \gamma) \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} - P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} = 3.835{,}23\text{ €}$$

Summenerhöhung bei m = 15 auf $S^{(n)}$ = 15.000 €

Methode 1: (Änderung durch Neuabschluss, ohne Stückkosten auf den zweiten Teil)

Durch Bestimmung der Prämie für den Neuabschluss x = 30+15; n = t = 15 und $S^{(zus)}$ = 5.000 € erhalten wir analog oben stehendem Äquivalenzprinzip $P^{(zus)}$ = 315,99 €. Die Gesamtprämie ergibt sich aus $P^{a,(n)} = P^a + P^{(n)}$ = 608,75 €.



Methode 4: (konstruktiver Beitrag)

Äquivalenzprinzip bei m =15 (noch ohne Stückkosten):

$$P^{(n)} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} + {}_{15}V^{a}_{30} =$$

$$= S^{(n)} \cdot A_{45:\overline{15}|} + (P^{(n)} \cdot \beta + S^{(n)} \cdot \gamma) \cdot \ddot{a}_{45:\overline{15}|} + 15 \cdot \alpha \cdot (P^{(n)} - P^{a})$$

Beachte, dass nur die Erhöhung der Prämie mit Abschlusskosten belastet wird.

Es folgt $P^{(n)}$ = 588,75 € und bei Berücksichtigung der Stückkosten $P^{a,(n)}$ = 608,75 €.

Beide Methoden sind offensichtlich äquivalent!

Laufzeitverlängerung bei m = 15 bei gleichem Beitrag

Verlängerung um 5 Jahre, d.h. Restlaufzeit jetzt 20 Jahre ab Änderungstermin.

Methode 3: (Beginnverlegung)

Verschiebe den Versicherungsbeginn um $k \in \mathbf{Z}$ so, dass bei gleich bleibendem Beitrag die Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt $15-k$ möglichst unverändert bleibt.

Gemäß der Äquivalenzgleichung gilt:

$$P \cdot \ddot{a}_{30+k:\overline{35-k}|} = S^{(n)} \cdot A_{30+k:\overline{35-k}|} + (P \cdot \beta + S^{(n)} \cdot \gamma) \cdot \ddot{a}_{30+k:\overline{35-k}|} + (35-k) \cdot \alpha \cdot P$$

also

$$S^{(n)} = \frac{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{30+k:\overline{35-k}|} - (35-k) \cdot \alpha}{A_{30+k:\overline{35-k}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{30+k:\overline{35-k}|}} \cdot P$$

und schließlich

$${}_{15-k}V^{a}_{30+k} = S^{(n)} \cdot A_{45:\overline{20}|} + (P \cdot \beta + S^{(n)} \cdot \gamma) \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} - P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|}.$$

Damit ergibt sich folgende Tabelle

k	$S^{(n)}$	${}_{15-k}V^{a}_{30+k}$
-2	12.703,33 €	4.193,48 €
-1	12.243,57 €	3.900,22 €
0	11.789,19 €	3.610,41 €
1	11.340,29 €	3.324,08 €
2	10.896,94 €	3.041,29 €

Offenbar passt $k = -1$ am besten zur vorhandenen Deckungsrückstellung 3.835,23 €. Allerdings müsste der Versicherungsnehmer oder das Versicherungsunternehmen 64,99 € zu der Deckungsrückstellung zuschießen.

Alternativ kann auch $k = 0$ gewählt werden und die restlichen 224,82 € stehen zur Bildung einer beitragsfreien Zusatzversicherung nach Methode 1 zur Verfügung. Daraus ergäbe sich eine zusätzliche Leistung in Höhe von

$$S^{(zus)} = \frac{1-\beta-\alpha}{A_{30:\overline{35}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}|}} \cdot 224{,}82\text{ €} = 458{,}36\text{ €}$$

Methode 4: (konstruktive Versicherungssumme)

Äquivalenzprinzip bei m = 15 (ohne Stückkosten):

$$P \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} + {}_{15}V_{30}^{a} = S^{(n)} \cdot A_{45:\overline{20}|} + (P \cdot \beta + S^{(n)} \cdot \gamma) \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} + (20-15) \cdot \alpha \cdot P$$

also mit P = 272,76 €

$$S^{(n)} = \frac{((1-\beta) \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|} - 5 \cdot \alpha) \cdot P + {}_{15}V_{30}^{a}}{A_{45:\overline{20}|} + \gamma \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}|}} = 12.056{,}11\,€$$

Die Unterschiede zwischen den beiden Methoden rühren hauptsichlich von den unterschiedlichen Zeitpunkten der Zillmerung: Bei Methode 3 wird immer komplett bei m = 0 gezillmert, bei Methode 4 ein Teil erst später bei m = 15.

4.7.3 Vor- und Nachteile der Änderungsmethoden

Methode 3:

- Methode 3 ändert den Vertragsbeginn auf rein mathematischer Art, was dem Versicherungsnehmer keinesfalls transparent ist.
- Bei Methode 3 ist zur Erklärung des aktuellen Zustandes keine Historie notwendig. Wartezeiten, Berechnungen zur Steuer oder zum Schlussüberschuss können aus den aktuellen Werten durchgeführt werden.
- Daten vor der technischen Änderungen lassen sich nicht mehr konsistent ermitteln, da gesamter Vertrag geändert wurde.
- Bei Methode 3 lässt sich bzgl. jedes technischen Teils die Prämie und die Deckungsrückstellung aus dem „Tarifbuch" nachvollziehen.

Methode 4:

- Bei Methode 4 ist zum Verständnis des Zustandes immer die Historie notwendig.
- Gegenüber dem Versicherungsnehmer können aus dem aktuellen Vertragsstand immer nur die „prospektiven" Daten dargestellt werden, aus dem historischen Stand allerdings auch die „retrospektiven".
- Prämie und Deckungsrückstellung haben mit dem Tarifbuch i.a. nichts mehr zu tun.