3 Leistungsbarwerte und Prämien

Ziel: Rechenmethoden zur Ermittlung der Barwerte und Prämien bei üblichen Produkten der Lebensversicherung.

3.1 Elementare Barwerte und Kommutationszahlen

Barwert einer Erlebensfallleistung der Höhe 1 in n Jahren für einen x-jährigen:

$$ {}_nE_x = 1 \cdot {}_np_x \cdot v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} $$

Bezeichnungen und Abkürzungen:

$D_x = l_x \cdot v^x$	diskontierte Zahl der Lebenden
$N_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} D_{x+\mu}$	Summe der diskontierten Zahl der Lebenden
$S_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} N_{x+\mu}$	doppelt aufsummierte diskontierte Zahl der Lebenden

Damit gilt

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} . $$

Barwert einer Todesfallleistung der Höhe 1 in n Jahren für einen x-jährigen:

$$ {}_{n|1}A_x = 1 \cdot {}_np_x \cdot q_{x+n} \cdot v^{n+1} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} \cdot v^{n+1} = \frac{d_{x+n} \cdot v^{x+n+1}}{l_x \cdot v^x} $$

Wird die Leistung bereits unterjährig und nicht erst zum Ende des Versicherungsjahrs erbracht, dann wird mit $v^{n+1/2}$ anstatt v^{n+1} abgezinst.

Bezeichnungen und Abkürzungen:

$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$ diskontierte Zahl der Toten

$M_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} C_{x+\mu}$ Summe der diskontierten Zahl der Toten

$R_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} M_{x+\mu}$ doppelt aufsummierte diskontierte Zahl der Toten

Damit gilt

$${}_{n|1}A_x = \frac{C_{x+n}}{D_x}.$$

Beziehungen zwischen Kommutationswerten:

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) \cdot v^{x+1} = v \cdot D_x - D_{x+1}$$

$$M_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} C_{x+\mu} = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} (v \cdot D_{x+\mu} - D_{x+1+\mu}) = v \cdot N_x - (N_x - D_x) = D_x - d \cdot N_x$$

$$R_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} M_{x+\mu} = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} (D_{x+\mu} - d \cdot N_{x+\mu}) = N_x - d \cdot S_x$$

3.2 Leistungsbarwerte typischer Versicherungen

Vorschüssig zahlbare lebenslange Leibrente:

Der versicherten Person wird ab Abschluss der Versicherung sofort bis zum Tod eine vorschüssige Rente der Höhe 1 ausgezahlt.

$$\ddot{a}_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+\mu}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

nachschüssig analog:

$$a_x = \sum_{\mu=1}^{\omega-x} \frac{D_{x+\mu}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \ddot{a}_x - 1$$

Vorschüssig zahlbare um m Jahre aufgeschobene lebenslange Leibrente:

Der versicherten Person wird m Jahre nach Abschluss der Versicherung bis zum Tod eine vorschüssige Rente der Höhe 1 ausgezahlt (nachschüssig analog).

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{\mu=m}^{\omega-x} \frac{D_{x+\mu}}{D_x} = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

Vorschüssig zahlbare auf n Jahre abgekürzte Leibrente:

Der versicherten Person wird ab Abschluss der Versicherung sofort bis zum Tod, aber maximal n Jahre, eine vorschüssige Rente der Höhe 1 ausgezahlt (nachschüssig analog).

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{D_{x+\mu}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Vorschüssig zahlbare jährlich steigende lebenslange Leibrente:

Der versicherten Person wird ab Abschluss der Versicherung sofort bis zum Tod eine vorschüssige Rente ausgezahlt, deren Höhe bei 1 beginnt und sich jedes Jahr um 1 erhöht (nachschüssig analog).

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} (\mu+1) \cdot \frac{D_{x+\mu}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{\mu=0}^{\omega-x} (\mu+1) \cdot D_{x+\mu} = \frac{S_x}{D_x}$$

Lebenslange Risikoversicherung:

Der versicherten Person wird ab Abschluss im Todesfall eine Leistung in Höhe von 1 ausbezahlt.

$$A_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} \frac{C_{x+\mu}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

Risikoversicherung mit n Jahren Laufzeit:

Der versicherten Person wird ab Abschluss die kommenden n Jahre im Todesfall eine Leistung in Höhe von 1 ausbezahlt.

$$_{|n}A_x = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{C_{x+\mu}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Lebenslange Risikoversicherung mit steigender Versicherungssumme:

Der versicherten Person wird ab Abschluss im Todesfall eine steigende Leistung ausbezahlt, deren Höhe bei 1 beginnt und sich jedes Jahr um 1 erhöht.

$$(IA)_x = \sum_{\mu=0}^{\omega-x} (\mu+1) \cdot \frac{C_{x+\mu}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{\mu=0}^{\omega-x} (\mu+1) \cdot C_{x+\mu} = \frac{R_x}{D_x}$$

Kapitallebensversicherung oder gemischte Versicherung:

Stirbt die versicherte Person während der Laufzeit, so wird eine Todesfallleistung in Höhe von 1 fällig. Erlebt die versicherte Person das Versicherungsende, dann wird eine Erlebensfallleistung von 1 fällig.

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{C_{x+\mu}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Terme fixe:

Zum Versicherungsende nach n Jahren wird immer eine Leistung in Höhe von 1 fällig.

$$A_{\overline{n}|} = v^n$$

3.3 Nettoprämie

Die Leistungsbarwerte des letzten Abschnitts entsprechen den **Einmalbeiträgen**, die zum Vertragsabschluss zu zahlen wären.

Statt des Einmalbeitrags ist es bei Versicherungen üblich den Beitrag über die gesamte Laufzeit oder auch über eine abgekürzte Beitragszahlungsdauer gleichmäßig zu verteilen. Der Versicherungsnehmer zahlt einen **laufenden Beitrag**.

Gemäß des **Äquivalenzprinzips** ist die zu zahlende Prämie P für eine Versicherung mit Leistungsbarwert B und Beitragszahlungsdauer t eindeutig bestimmt durch

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = B$$

bzw. bei lebenslanger Beitragszahlung durch

$$P \cdot \ddot{a}_{x} = B$$

Beispiele: (Prämien typischer Versicherungen)

Kapitallebensversicherung

$$_{t}P(A_{x:\overline{n}|}) = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$$

Terme fixe

$$_{t}P(A_{\overline{n}|}) = \frac{A_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = \frac{v^n \cdot D_x}{N_x - N_{x+t}}$$

3.4 Bruttoprämien

Werden die Rechnungsgrundlagen der Kosten bei den Prämienzahlungen berücksichtig, dann spricht man von den **Bruttoprämien** oder **ausreichenden Prämien**.

Die folgenden Grundlagen dienen zur Berücksichtigung von Kosten je nach Entstehung:

Abschlusskosten / Zillmerung (α-Kosten)

Werden einmalig zu Versicherungsbeginn erhoben.

Dürfen höchstens 40 ‰ der gesamten Beitragssumme betragen.

Inkassokosten (β-Kosten)

Werden laufend dem Beitrag belastet.

Ein typischer Wert ist etwa 2 % des Beitrags.

Laufende Amortisationskosten (α^γ-Kosten) und Verwaltungskosten (γ-Kosten)

Werden laufend dem Versicherungsguthaben belastet – auch wenn keine Beiträge gezahlt werden.

Typische Werte sind 1 ‰ bis 10 ‰ der garantierten Versicherungssumme oder der gesamten Beitragssumme.

Beispiel: (Ausreichende Prämie für Kapitallebensversicherung)

Nach dem Äquivalenzprinzip muss für eine Versicherungssumme S gelten

$$
{}_tP^a(A_{x:\overline{n}|}) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} =
$$

$$
= S \cdot A_{x:\overline{n}|} + t \cdot {}_tP^a(A_{x:\overline{n}|}) \cdot \alpha + {}_tP^a(A_{x:\overline{n}|}) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} \cdot \beta + S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot (\alpha^\gamma + \gamma)
$$

Daraus folgt für die ausreichende Prämie ${}_tP^a$

$$
{}_tP^a(A_{x:\overline{n}|}) = \frac{S \cdot (A_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \cdot (\alpha^\gamma + \gamma))}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|} \cdot (1 - \beta) - t \cdot \alpha}.
$$

Zuschläge auf ausreichende Prämie:

- Zahlweisezuschläge:

  Pauschale Zuschläge proportional zu Beitrag:

  monatlich Zahlweise: 5%
  vierteljährliche Zahlweise: 3%
  halbjährliche Zahlweise: 2%

- Stückkosten:

  Jährlicher, fixer Betrag, häufig aber nur während Beitragszahlung

- Summenrabatte, -aufschläge:

  Gestaffelt nach Höhe der Versicherungssumme erhält der Versicherungsnehmer Rabatt oder muss Aufschlag zu proportional auf Beitrag zahlen.

- Risikozuschläge:

  Bei Risikolebensversicherungen wird ja nach Risiko (z.B. Erkrankung, Sport) auf Aufschlag proportional zu Versicherungssumme (in ‰ und jährlich mit Prämie fällig) oder zum Beitrag (in % pro Beitragszahlung fällig) erhoben.

3.5 Der Gleichbehandlungsgrundsatz

Bei der Tarifierung müssen folgende Grundsätze beachtet werden:

- Prämien und Leistungen dürfen nur nach gleichen Grundsätzen bemessen werden, wenn gleich Voraussetzungen zu Grunde liegen (§11 Abs. 2 VAG).
- Das Willkürverbot erfordert sachlich begründete Preis- und Leistungsdifferenzierungen, die für einen sachverständigen Dritten nachvollziehbar sind.

3.6 Entscheidung über zu verwendende Sterbetafel

Es stehen immer zwei Tafeln für die Kalkulation zur Verfügung:

- Tafel für Erlebensfall mit niedrigeren Sterblichkeiten
- Tafel für Todesfall mit höheren Sterblichkeiten

Wird in einem Vertrag Erlebensfall- und Todesfallleistung gemischt, dann muss die Sterbetafel für die Kalkulation verwendet werden, die zu den höheren Prämien führt.

Definition:

Eine Versicherung hat **Erlebensfall-Charakter**, wenn die Erlebensfall-Tafel zu höheren Prämien führt, andernfalls hat sie **Todesfall-Charakter**.

Beispiel: (typische Kapitallebensversicherung hat Todesfall-Charakter)

Nach Aufgabe 3.3 gilt für zwei Sterbetafeln mit $q_x < q'_x$ für alle x, dass auch

$$ {}_nP(A_{x:\overline{n}|}) = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < \frac{A'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} = {}_nP(A'_{x:\overline{n}|}) $$

3.7 Unterjährige Renten und Prämien

Sollen Renten anstatt jährlich in k unterjährigen Raten ausgezahlt werden, oder will man die Beiträge exakt und ohne pauschalen Aufschlag kalkulieren, so sind unterjährige Rentenbarwerte zu betrachten (vgl. auch Abschnitt 1.2):

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}} = \sum_{\mu=0}^{n\cdot k-1} \frac{1}{k} \cdot {}_{\frac{\mu}{k}}p_x \cdot v^{\frac{\mu}{k}}$$

Problem:

Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_{\frac{\mu}{k}}p_x$ sind bisher nicht definiert!

Ansatz:

Rente lässt sich als Summe über um jeweils μ/k-tel Jahre aufgeschobenen Renten schreiben, mit μ = 0, …, k – 1 Jahren:

$$\ddot{a}^{(k)}_x = \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot {}_{\frac{\mu}{k}|}\ddot{a}_x$$

Lösung: (Approximation durch lineare Interpolation des Barwerts)

Nimmt man an, dass sich die beobachteten (diskontierten) Sterbefälle gleichmäßig über das Jahr verteilen, dann kann man den Barwert der Rente mit unterjährig verschobenem Beginn linear interpolieren:

$${}_{\frac{\mu}{k}|}\ddot{a}_x \approx \frac{k-\mu}{k} \cdot \ddot{a}_x + \frac{\mu}{k} \cdot {}_{1|}\ddot{a}_x = \frac{k-\mu}{k} \cdot \ddot{a}_x + \frac{\mu}{k} \cdot (\ddot{a}_x - 1) = \ddot{a}_x - \frac{\mu}{k}$$

Damit ist dann

$$\ddot{a}^{(k)}_x = \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot {}_{\frac{\mu}{k}|}\ddot{a}_x \approx \frac{1}{k} \cdot \sum_{\mu=0}^{k-1} (\ddot{a}_x - \frac{\mu}{k}) = \ddot{a}_x - \frac{k(k-1)}{2k^2} = \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}$$

Formel für abgekürzte Leibrente:

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x)$$

Da durch die Interpolation der um μ/k-tel Jahre verschobenen Renten im Jahr n + 1 insgesamt k Zahlungen zu viel einkalkuliert werden, ist der Korrekturterm $\frac{k-1}{2k} \cdot {}_nE_x$ für die Approximation nötig.