1 Elementare Finanzmathematik

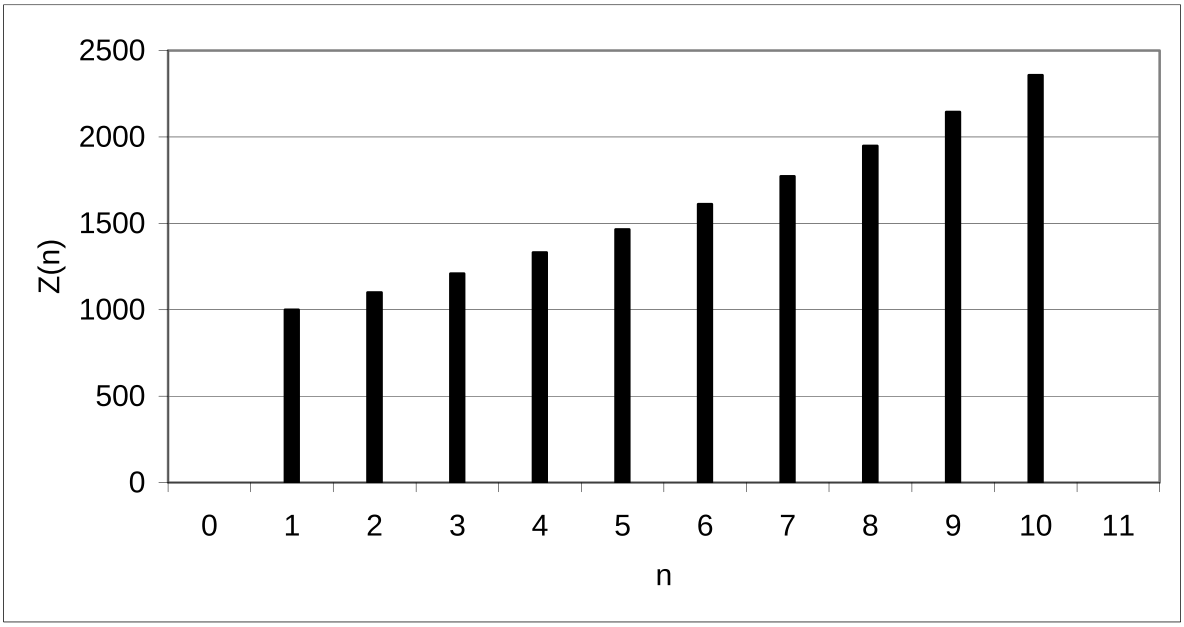
Ziel: Bewertung und Vergleich aktueller und zukünftiger Geldströme

1.1 Deterministische Zahlungsströme

Definition: Ein **deterministischer Zahlungsstrom** ist eine Funktion Z: **N** $\rightarrow$ **R**, die jedem Zeitpunkt n $\in$ **N** eine Zahlung zuordnet. Dabei bezeichnen positive Werte Ein- und negative Auszahlungen auf bzw. aus dem Guthaben des Betrachters.

Beispiel: Jährlich um 10% steigende, am Ende des Jahres geleistete Einzahlungen (Zeitrente) über 10 Jahre beginnend mit 1.000,00 € nach dem ersten Jahr.

$Z(n) = 1.000 \cdot 1{,}1^{(n-1)}$, für $n \in \{1, 2, ..., 10\}$, $Z(n) = 0$ sonst



Frage: Was ist diese Rente zum Zeitpunkt 0 Wert?

Bezeichnungen:

B, S	Kapital zu Beginn und zum Ende der betrachteten Periode
p	Zinsfuß in Prozent
$i = \frac{p}{100}$	Zinssatz, effektiver Zins für ein Jahr auf Kapital 1
$r = 1 + i$	Aufzinsungsfaktor
$v = \frac{1}{1+i}$	Abzinsungs- oder Diskontierungsfaktor
$d = 1 - v$	jährliche Diskontrate (Umformungen: $d = iv = \frac{i}{r} = \frac{i}{1+i}$)

Arten der Verzinsung:

Einfache Verzinsung über n Zeitschritte (wird bei Versicherungen üblicherweise bei Berechnung monatlicher Verzinsung aus Jahreszins verwendet):

$$S = B + \underbrace{Bi + \ldots + Bi}_{\text{n mal}} = B \cdot (1 + ni)$$

Verzinsung mit Zinseszins über n Zeitschritte (wird bei Versicherungen üblicherweise bei Berechnung mehrjähriger Verzinsung):

$$S = B \cdot \underbrace{(1+i) \cdot \ldots \cdot (1+i)}_{\text{n mal}} = B \cdot (1+i)^n$$

Beide Methoden zusammen ergibt die **gemischte Verzinsung** über n Jahre und m Monate:

$$S = B \cdot (1+i)^n \cdot (1 + \tfrac{m}{12} i)$$

Definition: (Barwert, Endwert eines deterministischen Zahlungsstroms)

Bezeichne mit $Z^+ = \max(Z, 0)$ bzw. $Z^- = -\min(Z, 0)$ den Positiv- bzw. Negativteil des Zahlungsstroms.

Als **Barwert** bezeichnet man die Summe der jeweils auf den Zeitpunkt 0 abgezinsten Funktionswerte eines Zahlungsstroms Z, vorausgesetzt die entsprechenden Teilsummen des Positiv- und Negativteils sind endlich.

$$B(Z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} Z(\mu) \cdot v^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} Z^+(\mu) \cdot v^{\mu} - \sum_{\mu=0}^{\infty} Z^-(\mu) \cdot v^{\mu}$$

Existiert der Barwert eines Zahlungsstroms, so nennt man in **bewertbar**.

Als **Endwert** bezeichnet man die Summe der jeweils auf den Zeitpunkt $\sup(\mu \in \mathbf{N}; Z(\mu) \neq 0)$ aufgezinsten Funktionswerte eines Zahlungsstroms Z. der Endwert existiert nur, wenn der Zahlungsstrom Z **beschränkt** ist, d.h. wenn $\sup(\mu \in \mathbf{N}; Z(\mu) \neq 0) < \infty$.

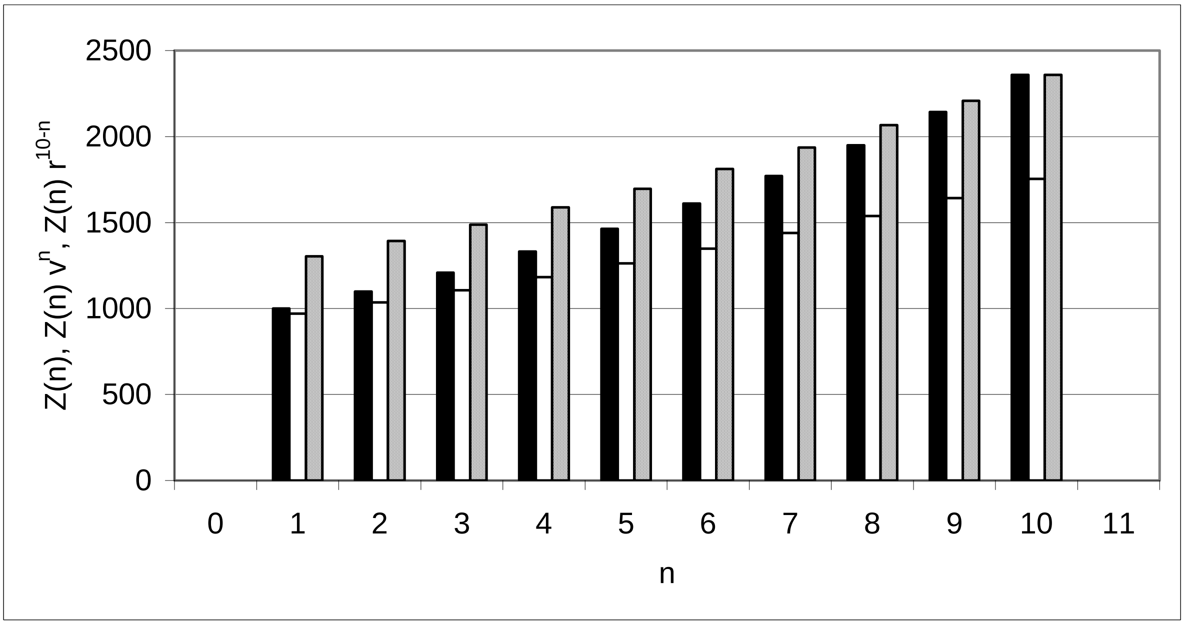
$$S(Z,n) = \sum_{\mu=0}^{n} Z(\mu) \cdot r^{n-\mu}$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Mit einem Zinssatz i = 3,0 % ergibt sich als Barwert bzw. Endwert für das letzte Beispiel:

$$B(Z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} Z(\mu) \cdot v^{\mu} = \sum_{\mu=1}^{10} 1.000 \cdot \left(\frac{1{,}1}{1{,}03}\right)^{\mu} = 13.285{,}54$$

$$S(Z,10) = \sum_{\mu=0}^{10} Z(\mu) \cdot r^{10-\mu} = \sum_{\mu=0}^{10} 1.000 \cdot 1{,}1^{\mu} \cdot 1{,}03^{10-\mu} = 17.854{,}66$$



Offensichtlich gilt in obigem Beispiel:

$$B(Z) \cdot 1{,}03^{10} = S(Z,10)$$

Satz: (Beziehung Barwert – Endwert)

1. Jeder beschränkte Zahlungsstrom ist bewertbar.
2. Sei $n = \sup(\mu \in \mathbf{N};\ Z(\mu) \neq 0) < \infty$, dann gilt

   $$B(Z) \cdot r^n = S(Z,n)$$

Beweis: Offensichtlich. □

Definition: (Äquivalenzprinzip)

Zwei bewertbare Zahlungsströme Z_1 und Z_2 heißen äquivalent, wenn sie den gleichen Barwert besitzen, d.h. wenn gilt $B(Z_1) = B(Z_2)$.

Beispiel: (Fortsetzung)

Der Zahlungsstrom Z aus den vorausgegangenen Beispielen ist äquivalent zum Zahlungsstrom Z(0) = 13.285,54 und Z(n) = 0 für $n \geq 1$. Über das Äquivalentprinzip lässt sich damit ein Preis für den Zahlungsstrom festlegen: Um diese Zeitrente von einer Bank zu erhalten müsste der Kunde zum Zeitpunkt n = 0 einmalig 13.285,54 € zahlen.

1.2 Zeitrenten

Definition: Eine **Zeitrente** ist ein positiver Zahlungsstrom in vorher festgelegter Höhe und mit vorher festgelegtem Beginn und Ende.

Eine Rente heißt **vorschüssig** gezahlt, wenn sie jeweils zum Beginn einer Zeitperiode fällig wird. Sie heißt **nachschüssig** gezahlt, wenn sie jeweils zum Ende einer Zeitperiode fällig wird

In diesem Abschnitt gehen wir von einer konstanten jährlichen Rente in Höhe von 1 aus. Andere konstante Renten lassen sich einfach durch Multiplikation des entsprechenden Barwerts mit dieser Rente bestimmen.

Barwertformeln und Bezeichnungen:

Vorschüssige Zeitrente mit n Jahren Laufzeit und sofortigem Beginn:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{\mu=0}^{n-1} v^{\mu} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

Nachschüssige Zeitrente mit n Jahren Laufzeit und sofortigem Beginn:

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{\mu=1}^{n} v^{\mu} = \frac{1-v^{n+1}}{1-v} - 1 = \frac{1-v^n}{i} = v \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Vorschüssige Zeitrente mit ewiger Laufzeit und sofortigem Beginn (nachschüssig analog):

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{d}$$

Vorschüssige um m Jahre aufgeschobene Zeitrente mit n Jahren Laufzeit (nachschüssig analog):

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{\mu=m}^{m+n-1} v^{\mu} = \frac{1-v^{m+n}}{1-v} - \frac{1-v^m}{1-v} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Beispiele:

1. Wie hoch sind die jährlichen Tilgungsraten R, wenn 100.000 € bei einem konstanten effektiven Jahreszins von 5,5% auf 30 Jahre in gleichen Raten zurück gezahlt werden sollen?

   $$R \cdot a_{\overline{30}|} = 100.000$$

   $$R = 100.000 : a_{\overline{30}|} = 100.000 \cdot \frac{0{,}055}{1-\frac{1}{1{,}055^{30}}} = 6.880{,}54$$

2. Aus einer Stiftung sollen jährlich 500.000 € als Preisgelder für verdiente Wissenschaftler ausgeschüttet werden. Die Zahlungen sollen beginnend mit der Gründung der Stiftung zeitlich unbegrenzt möglich sein. Wie viel Kapital K muss bei der Gründung zur Verfügung stehen, damit bei einem Zins von 4,0% die Zahlungen gewährleistet sind?

   $$K = 500.000 \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 500.000 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1{,}04}} = 13.000.000$$

Barwertformeln und Bezeichnungen: (Fortsetzung)

Vorschüssige Zeitrente in mit n Jahren Laufzeit und sofortigem Beginn ausgezahlt in k unterjährigen Teilen (nachschüssig analog):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \sum_{\mu=0}^{n\cdot k-1} \tfrac{1}{k}\cdot v^{\frac{\mu}{k}} = \tfrac{1}{k}\cdot \sum_{\mu=0}^{k-1} v^{\frac{\mu}{k}} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} v^{\mu} = \tfrac{1}{k}\cdot \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{k}}}\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} = \tfrac{1}{k}\cdot \frac{1-v^{n}}{1-v^{\frac{1}{k}}}$$

Ersetzt man in obiger Formel v durch 1 – d, so kann man für kleine d die Funktion $v^{\mu/k}$ durch $1-\frac{\mu}{k}d$ annähern (Taylor-Reihen-Entwicklung):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} \approx \tfrac{1}{k}\cdot \sum_{\mu=0}^{k-1}(1-\tfrac{\mu}{k}d)\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} = \left(1-\frac{k-1}{2k}d\right)\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Beispiel: (Fortsetzung)

1. Wie hoch sind die monatlichen Tilgungsraten R, wenn 100.000 € bei einem konstanten effektiven Jahreszins von 5,5% auf 30 Jahre in gleichen Raten zurück gezahlt werden sollen?

   $$12\cdot R\cdot a_{\overline{30}|}^{(12)} = 100.000$$

   $$R = 100.000 : (12\cdot a_{\overline{30}|}^{(12)}) = 100.000\cdot v^{\frac{1}{12}} : (12\cdot \ddot{a}_{\overline{30}|}^{(12)}) = 554{,}44$$

   Beachte, dass 12 · 554,44 € = 6.653,28 € < 6.880,54 €, dem Ergebnis bei jährlicher Zahlung.

   Mit dem Näherungsverfahren ergibt sich R = 554,31.

Anmerkung: Vorteil des Näherungsverfahrens ist, dass es zur bei Versicherungen üblichen gemischten Verzinsung passt (unterjährig nur einfach, d.h. linear, verzinst).

1.3 Zufällige Zahlungsströme

Definition: Ein **zufälliger Zahlungsstrom** ist eine Funktion Z: $\mathbf{N} \to \mathfrak{X}$, die jedem Zeitpunkt n $\in$ **N** eine reellwertige Zufallsvariable Z(n) $\in \mathfrak{X}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω_n, $\mathcal{B}_n$, P_n) zuordnet.

Beispiel: Garantieverlängerung von zwei auf fünf Jahren

Leistungsbeschreibung: Bei Ausfall des versicherten Gerätes leistet die Versicherung einmalig nachschüssig für die Jahre 3 bis 5 nach Kauf des Geräts den Kaufpreis in Höhe von 1.000 €.

Definiert man mit q_n die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät im Jahr n ausfällt, so ist die Zufallsvariable Z(n) gegeben durch

Z(0) = Z(1) = Z(2) = 0

$$Z(n) = \begin{cases} 1.000, & \text{mit WSK } (1-q_1) \cdot \ldots \cdot (1-q_{n-1}) \cdot q_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } n = 3, 4, 5$$

Die q_n wurden aus den Daten des Herstellers geschätzt:

n	1	2	3	4	5
q_n	0,01	0,02	0,02	0,05	0,10

Wie hoch ist die zu zahlende Prämie für die Versicherung?

Definition: (Barwert eines zufälligen Zahlungsstroms)

Als **Barwert** bezeichnet man die Summe der jeweils auf den Zeitpunkt 0 abgezinsten Erwartungswerte der Zufallsvariablen eines Zahlungsstroms Z, vorausgesetzt die Erwartungswerte und die entsprechenden Teilsummen des Positiv- und Negativteils sind endlich.

$$B(Z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} E[Z(\mu)] \cdot v^{\mu}$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Nehmen wir an, dass die Versicherung Geld für 3,0% anlegen kann, dann ergibt sich als Barwert

$$B(Z) = 0{,}99 \cdot 0{,}98 \cdot (0{,}02 \cdot v^3 + 0{,}98 \cdot 0{,}05 \cdot v^4 + 0{,}98 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}1 \cdot v^5) \cdot 1.000 =$$
$$= 0{,}137911578 \cdot 1.000 = 137{,}91$$