INTERNE MODELLE IN DER LEBENSVERSICHERUNG

3. MaRisk-TAGUNG DER BDO

Dr. Frank Schiller
20.05.2010

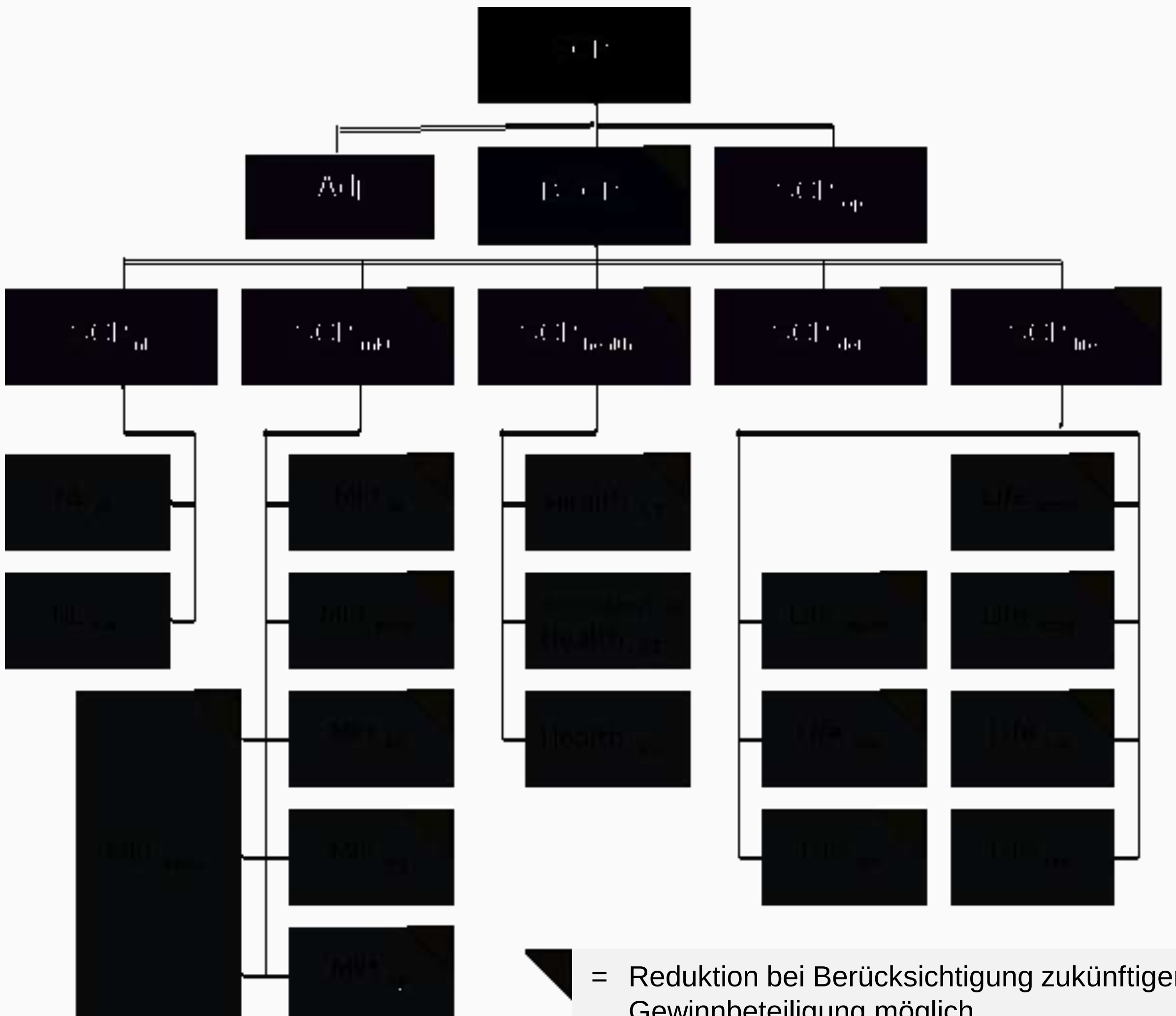
Munich RE

Agenda

- Risikomodelle und Unternehmenssteuerung
- Biometrische Analysen:
  Traditioneller Ansatz
- Biometrische Analysen:
  Anwendung von Generalisierten Linearen Modellen
- Ein Risikomodell für Leben:
  Modellierung und Kalibrierung

RISIKOMODELLE UND UNTERNEHMENSSTEUERUNG

Beispiel für ein Risikomodell
Solvency II



= Reduktion bei Berücksichtigung zukünftiger Gewinnbeteiligung möglich

SCR: Solvency Capital Requirement

BSCR: Basic SCR

Adj: Adjustments

SCR_{op}: Operational risk

Non-Life
- Prämien und Reserven
- Katastrophen

Markt
- Währung
- Immobilien
- Fixed interest
- Aktien
- Zins-Spread
- Kumul

Kranken
- Langzeit UW
- Kurzzeit UW
- Arbeiterunfall

Default

Leben
- Rentenanpassung
- Sterblichkeit
- Langlebigkeit
- Berufsunfähigkeit
- Storno
- Kosten
- Katastrophen

Beispiel für ein internes Risikomodell
Münchener Rück Risikomodell

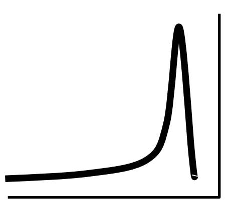
Munich RE

Gesamtrisiko

Anlagerisiko

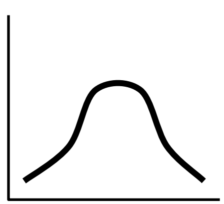
Kreditrisiko

- Corporate Bonds
- Retrozession
- Andere Forderungen



Marktrisiko

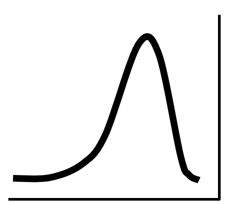
- Aktien, Immobilien
- Zinsrisiko
- Wechsel-kursrisiko



VT Risko

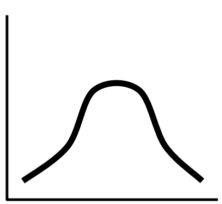
P&C

- NatCat und andere Großschäden
- Prämien Nachverrech-nung
- Reserve-schwankungen



L&G

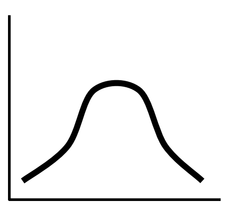
- Serblichkeit / Langlebig-keit
- Invalidität
- Storno



Operationelles Risiko

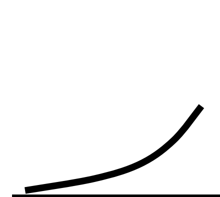
Geschäftsrisiko

- Volumen-änderung
- Änderung in Gewinn-margen und Kosten



Ereignisse

- Betrug
- Fehler
- System-unter-brechung



Internes Risikomodell
Aufgaben

Identifizieren

Beschreiben

Erklären

Entscheidungsunterstützung

- Risikokapital individuell gemäß der Risikostruktur des Unternehmens quantifizieren
- Beurteilen der Risikotragfähigkeit und Profitabilität.

Interne Risikomodelle sind ein wichtiger Teil des Risikomanagements und der Unternehmenssteuerung

Internes Risikomodell
Wie funktioniert ein stochastisches Modell?

Munich RE

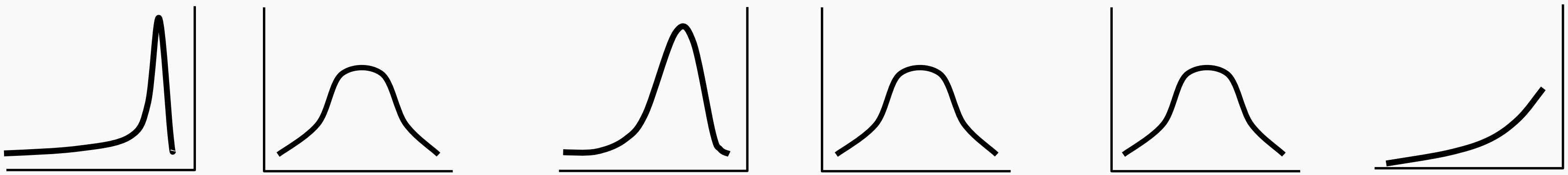
- **Stochastische Modelle** bestimmen das Risikokapital basierend auf Zufallsvariablen und Wahrscheinleichkeitsverteilungen.
- Wesentliche Schritte sind:

Modellbildung	Welche Größen sind im Modell zufällig und welche Abhängigkeiten bestehen?
Modellkalibrierung	Wahrscheinlichkeitsverteilungen für zufällige Größen bestimmen – aussagekräftiges Datenmaterial!
Modellauswertung	Analytische Auswertung und/oder Simulation
Ergebnisaufbereitung	Risikokapital, Risikotragfähigkeit, Rentabilität Gesamtunternehmen, Teilsegmente, Produkte

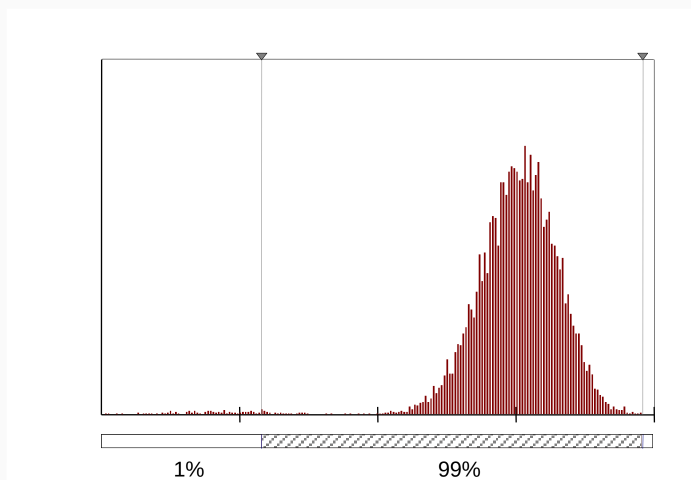
Internes Risikomodell
Risiko Aggregation, Bewertung und Allokation

Munich RE

Kreditrisiko	Marktrisiko	P&C	L&G	Geschäftsrisiko	Ereignisse



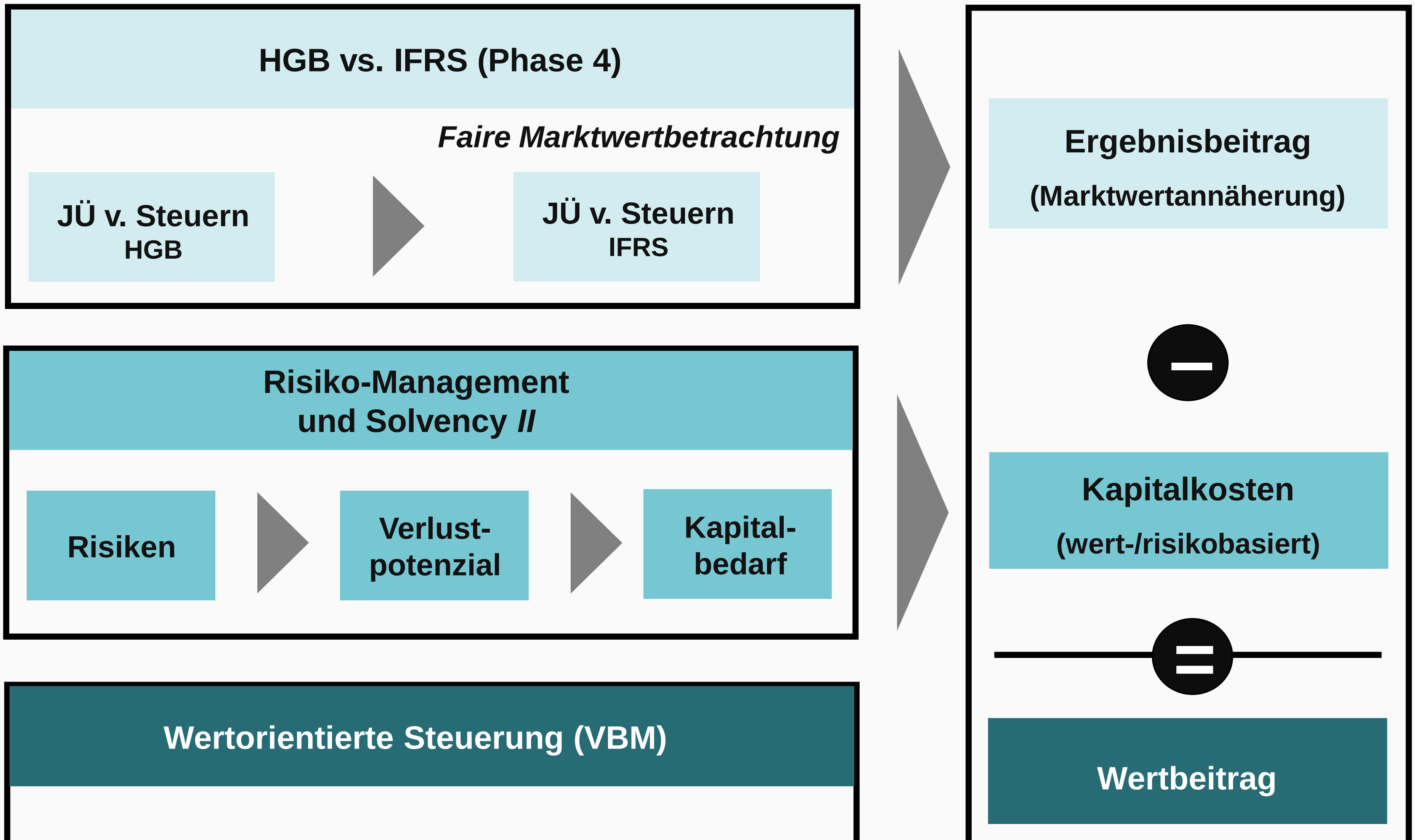
Diversifikation / Korrelation



Allokation

Risiko-Management und Solvency II
wertorientierte Ergebnisrechnung und -steuerung

Munich RE



Internes Risikomodell und Solvency II

Munich RE

Anforderungen an das Modell	Anforderungen an die Prozesse
▪ Vollständigkeit (evtl. Partialmodell) ▪ Transparenz ▪ Zuverlässigkeit und Richtigkeit („Statistical Quality Test“) ▪ Konsistenz („Calibration Test“) ▪ Mathematische Verfahren ▪ Validierung	▪ Einsatz zur Unternehmenssteuerung („Use Test“) ▪ Aktive Beteiligung des Managements ▪ Qualifikation der Mitarbeiter ▪ Dokumentation ▪ Zertifizierung

Kosten / Nutzen!?

Artikel 76 (2):

Die Berechnung des besten Schätzwerts hat auf der Grundlage *aktueller und glaubwürdiger Informationen* sowie *realistischer Annahmen* zu erfolgen und stützt sich auf *angemessene versicherungsmathematische Methoden* und *statistische Techniken*.

Artikel 82:

Die Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen verfügen über Prozesse und Verfahren, mit denen sicher gestellt wird, dass die besten Schätzwerte und die Annahmen, die der Berechnung der besten Schätzwerte zu Grunde liegen, regelmäßig mit Erfahrungsdaten verglichen werden.

Beispiel eines modernen Kontrollzyklus

Abgeleitete Entscheidungen

Modelle kalibrieren

- Medizinische und demografische Daten
- Biometrische Analysen und aktuarielle Methoden

Modelle auswerten

- Bilanzielle Gewinnanalysen
- Embedded Value
- ALM
- Risikomodell

Ergebnisse bewerten

- Statistische Signifikanz
- Planung und Prognose
- Risikomanagement

BIOMETRISCHE ANALYSEN: TRADITIONELLER ANSATZ

Statistik für Biometrische Analysen
Sterberaten oder -wahrscheinlichkeiten

Munich RE

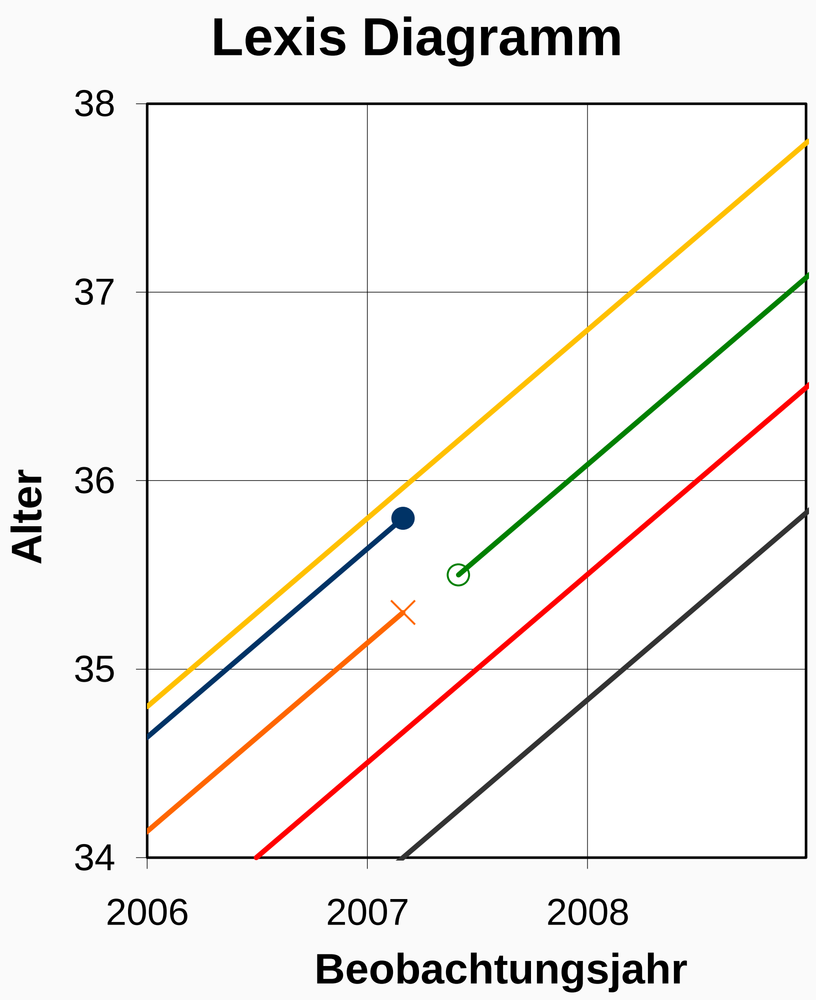
Naiver Ansatz SterbeWSK *q* zu schätzen

$$q = \frac{\#\text{Tote}}{\#\text{Lebende}}$$

- # Tote: einfach abzählen
- # Lebende: nicht eindeutig bestimmbar

Mögliche Ansätze die Anzahl der Lebenden / das Exposure zu bestimmen

1. Aktuarieller Ansatz (nach Gerber)
2. Initial Exposure
3. Central Exposure

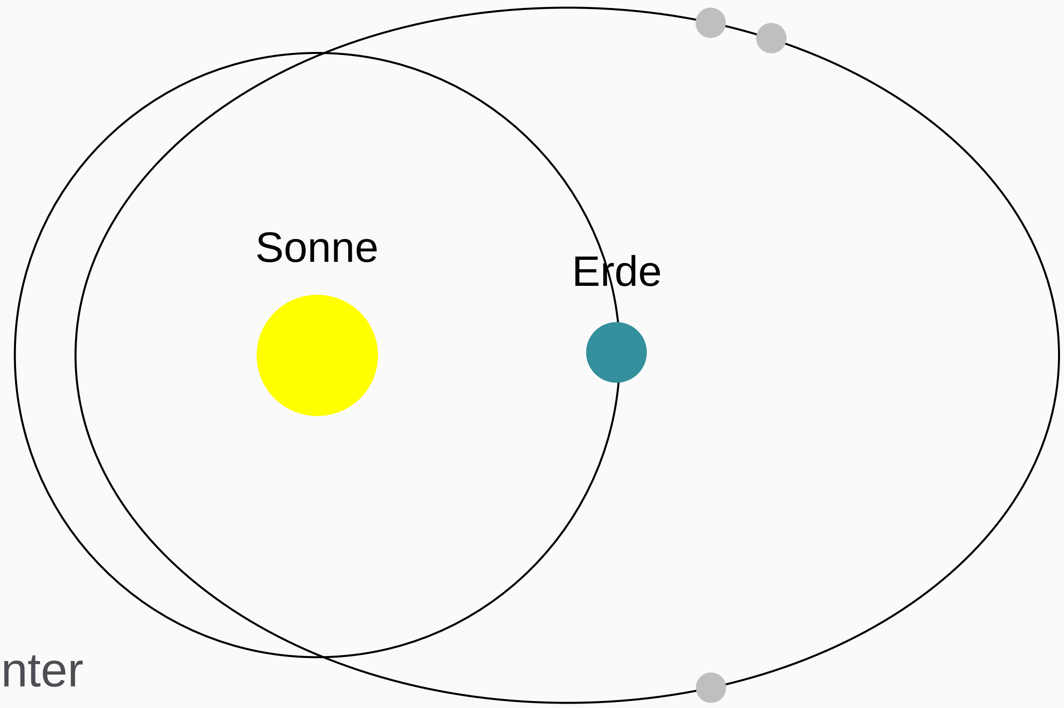


BIOMETRISCHE ANALYSEN: ANWENDUNG VON GENERALISIERTEN LINEAREN MODELLEN

Generalisierte Lineare Modelle (GLM)

Munich RE

C. F. Gauss 1777-1855



Gauss erfand Lineare Modelle unter anderem zur Berechnung von Orbits. GLMs wurden 1972 von Nelder und Wedderburn als Verallgemeinerung Gauss' Ansatz entwickelt.

Best Estimates für ein Portfolio Risikolebensversicherung mit Raucherstatus

Portfoliodaten einer deutschen Lebenserstversicherung:

Altersintervall:	18 - 65
Exposure:	2 Millionen Policenjahre (NR, m)
	1 Million Policenjahre (NR, f)
	0,3 Millionen Policenjahre (R, m)
	0,1 Millionen Policenjahre (R, f)
Beobachtete Zahl Toter:	Sehr kleine Anzahl für weibliche Raucher

Traditionelle Methoden können für die Herleitung von Best Estimates nicht angewendet werden

Best Estimates für ein Portfolio
Anpassung für Männer

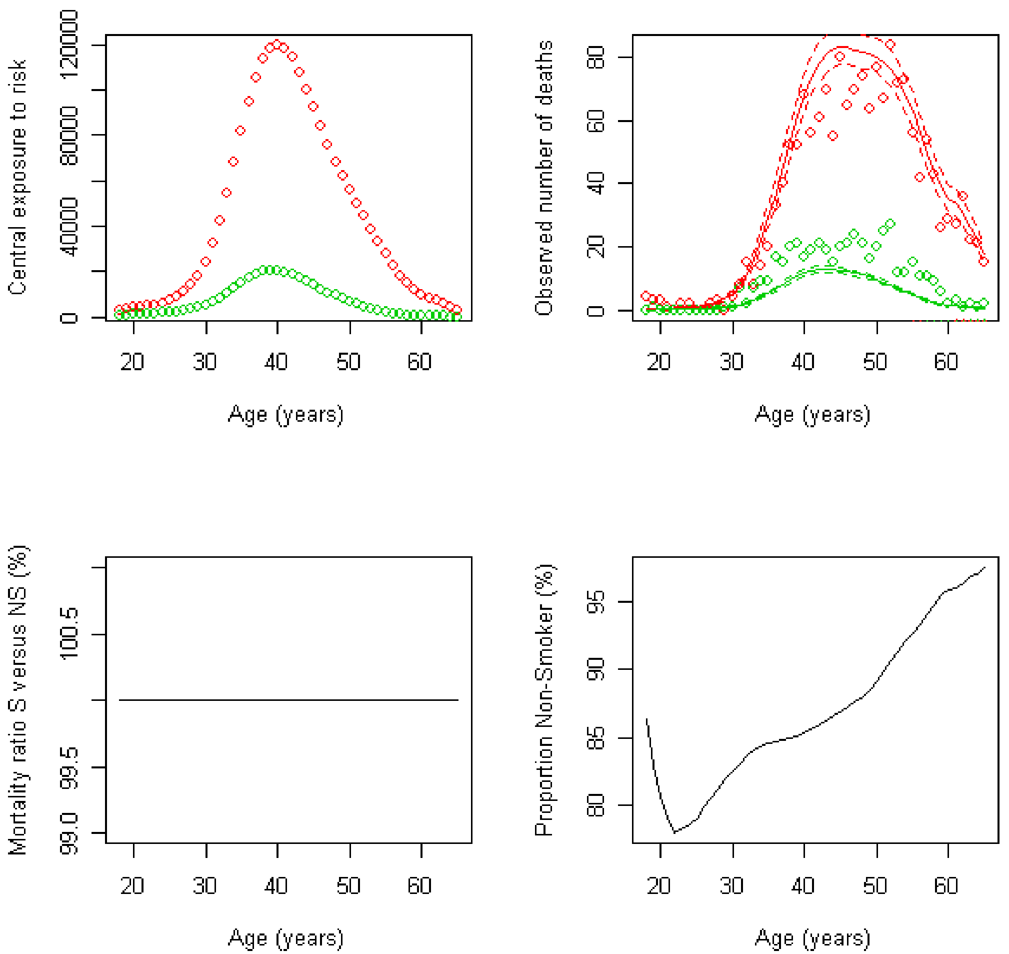
Problem:

- Kleine Anzahl an Toter erlaubt nicht die Verwendung traditioneller Ansätze.

Erster Schritt:

- Anpassung durch GLMs ohne Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus

► Fit nicht zufriedenstellend



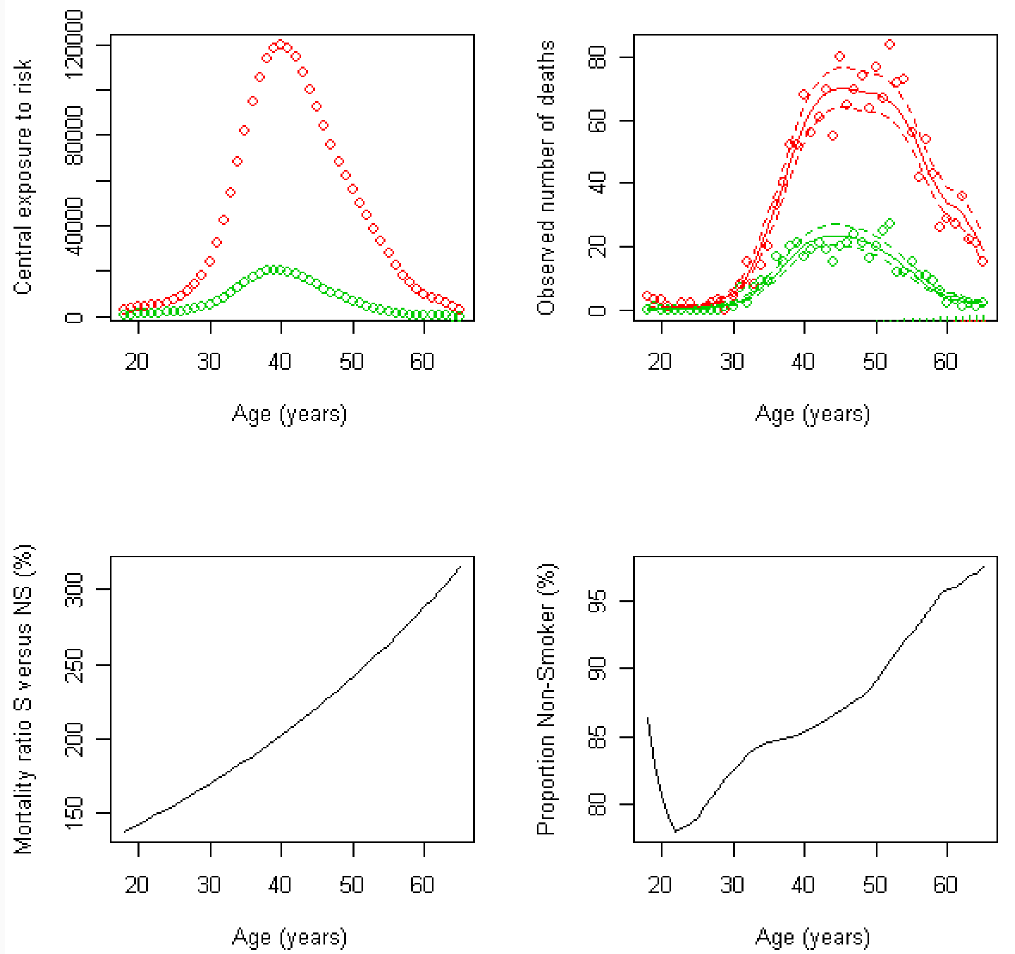
Best Estimates für ein Portfolio
Anpassung für Männer nach Raucherstatus

Munich RE

Zweiter Schritt:

- Anpassung durch GLMs mit Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus.
- Dabei quadratische Abhängigkeit nach Alter angesetzt.

► Fit angemessen



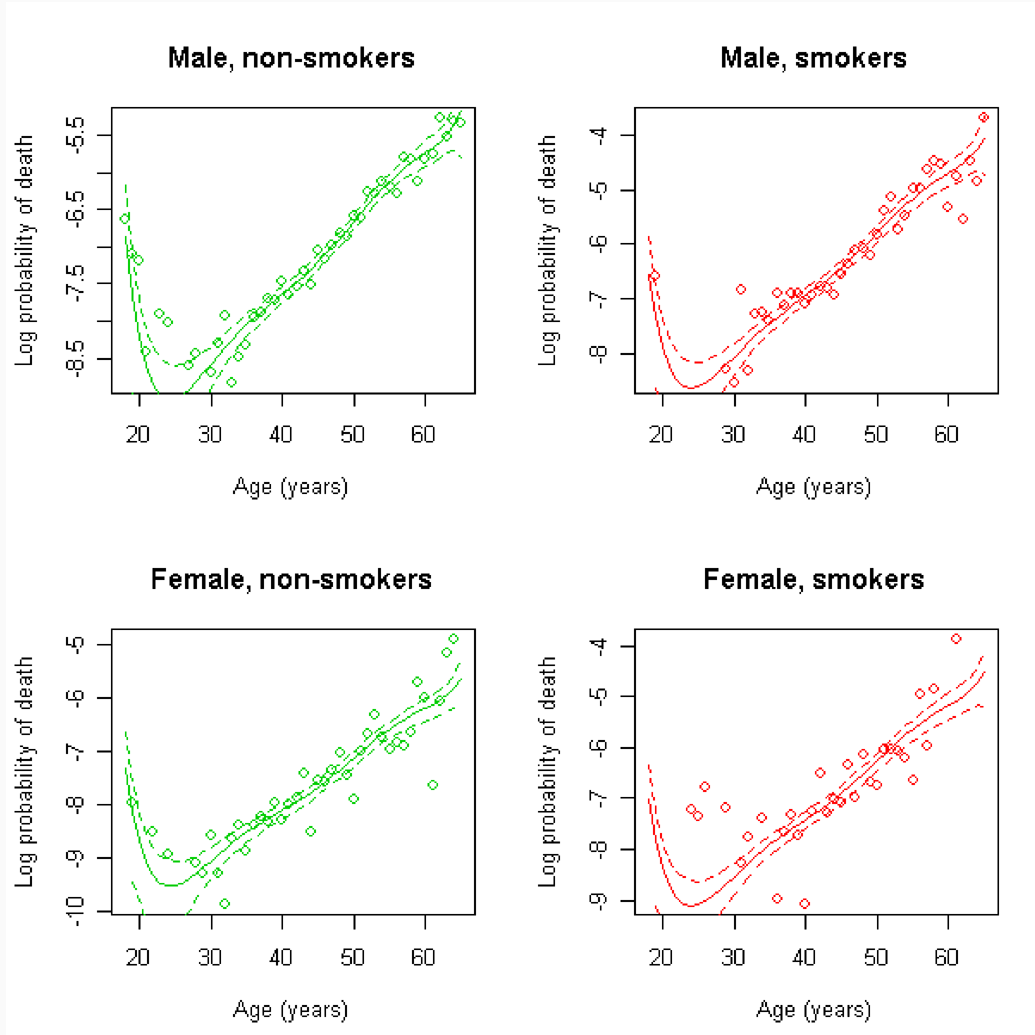
Best Estimates für ein Portfolio
Gelichzeitige Anpassung für Männer und Frauen

Dritter Schritt:

- Anpassung mit Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus

und

- verwende gleiche Grundform für beide Geschlechter
- ► Angemessene Anpassung auch für kleine Anzahl Toter bei Frauen möglich



Munich RE

EIN RISIKOMODELL FÜR LEBEN: MODELLIERUNG UND KALIBRIERUNG

BRiSMA
Risikomodell / stochastische Simulation

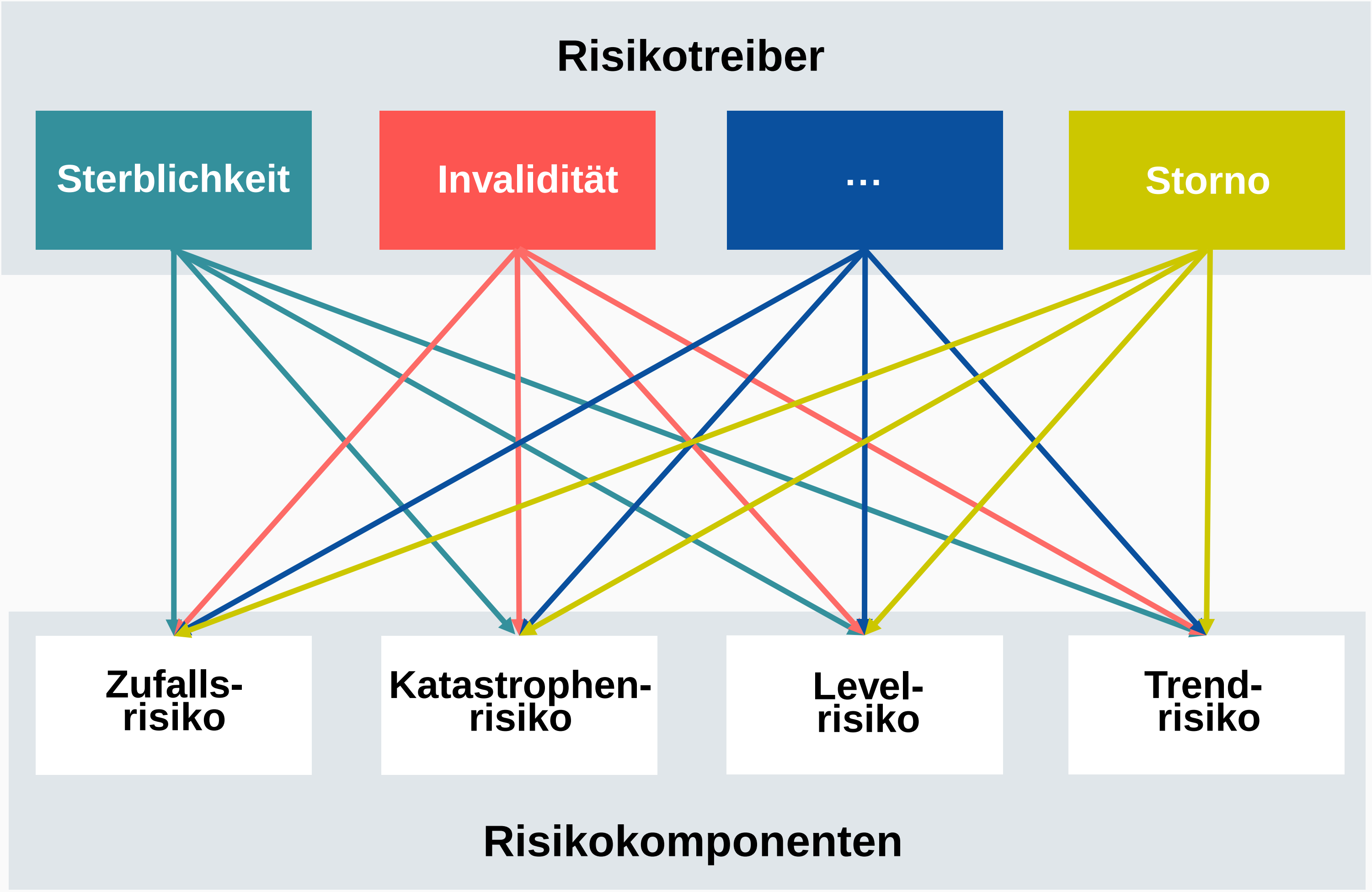
BRiSMA (Biometric Risk – Stochastic Modeling Approach)
– grundlegende Idee einer stochastischen Modellierung

Für jeden Risikotreiber werden Simulationen durch die folgende Vorschrift generiert:

Simulierter Wert = Best Estimate Wert · Faktor für Schwankung

Die Zufallsvariablen der Faktoren für die Schwankung sind auf den Erwartungswert 1 normiert, um die Simulation auf den Best Estimate zu zentrieren.

BRiSMA
Wesentliche Risikotreiber und -komponenten



BRiSMA
Risikokomponenten im Detail

Munich RE

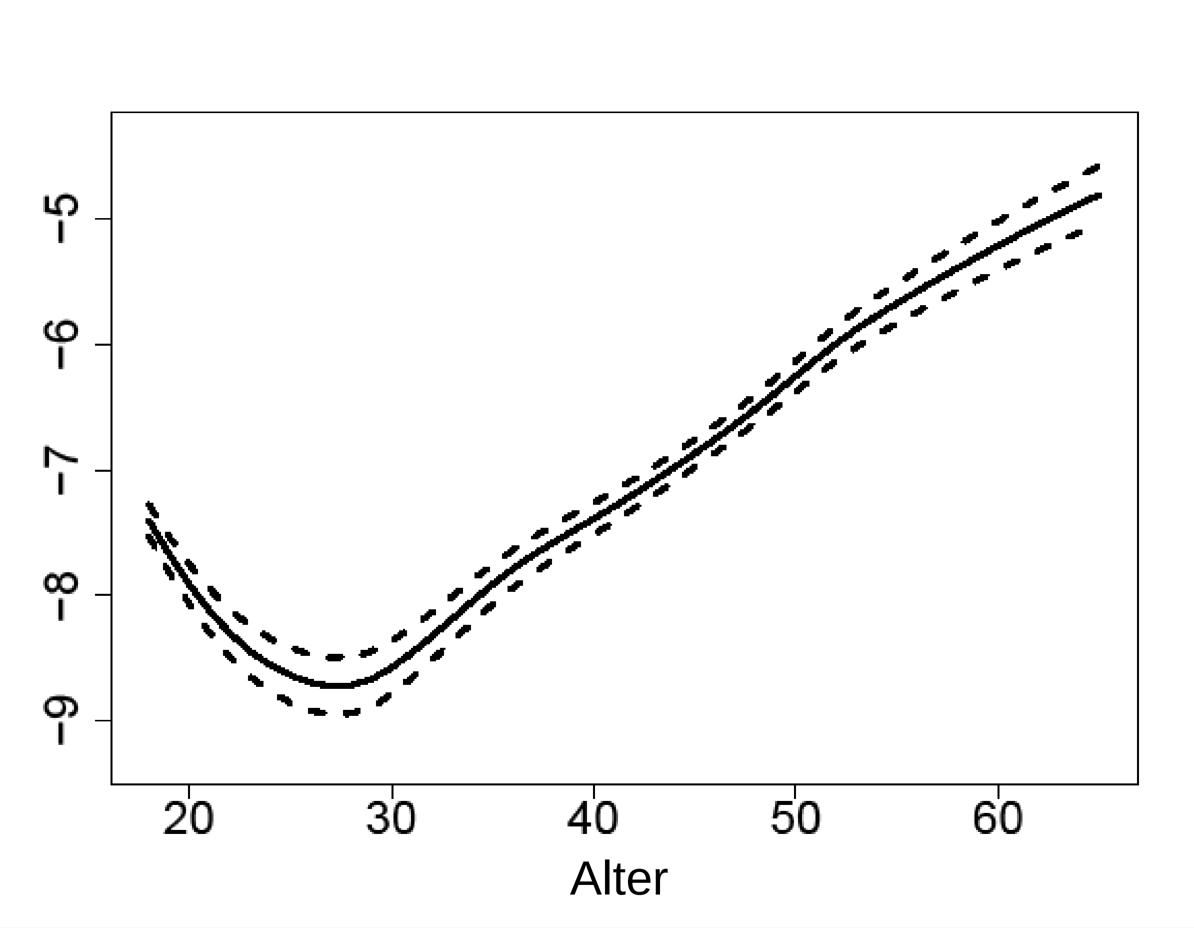
Risikokomponenten	
Zufallsrisiko	Jährliche, zufällige Fluktuationen Kalibriert auf die Schwankung der Gesamtschadenverteilung des Portfolios
Katastrophenrisiko	Z.B. Pandemien, Naturgefahren Kalibriert auf historische Großschäden und Experteneinschätzung
Irrtumsrisiko	Irrtumsrisiko: Fehleinschätzung des Best Estimate durch schlechte Datenqualität, Basisrisiko etc. Kalibriert mit biometrischen Analysen und Markteinschätzung
Trendrisiko	Langzeitentwicklung eines ansonsten korrekt geschätzten Best Estimate Kalibriert auf historischen Trendentwicklungen

Anwendung von GLMs für Kalibrierung von Irrtums- und Trendrisiko

BRiSMA
Kalibrierung des Levelrisikos

Logarithmus des Best Estimate mit 95% Konfidenzintervall:

1. Bestimme Konfidenz-intervall mit GLM
2. Wende Poisson Modell für die Simulation des Levelrisikos an.
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen
4. Modelliere ggf. Basis-risiko entsprechend



BRiSMA
Kalibrierung des Trendrisikos

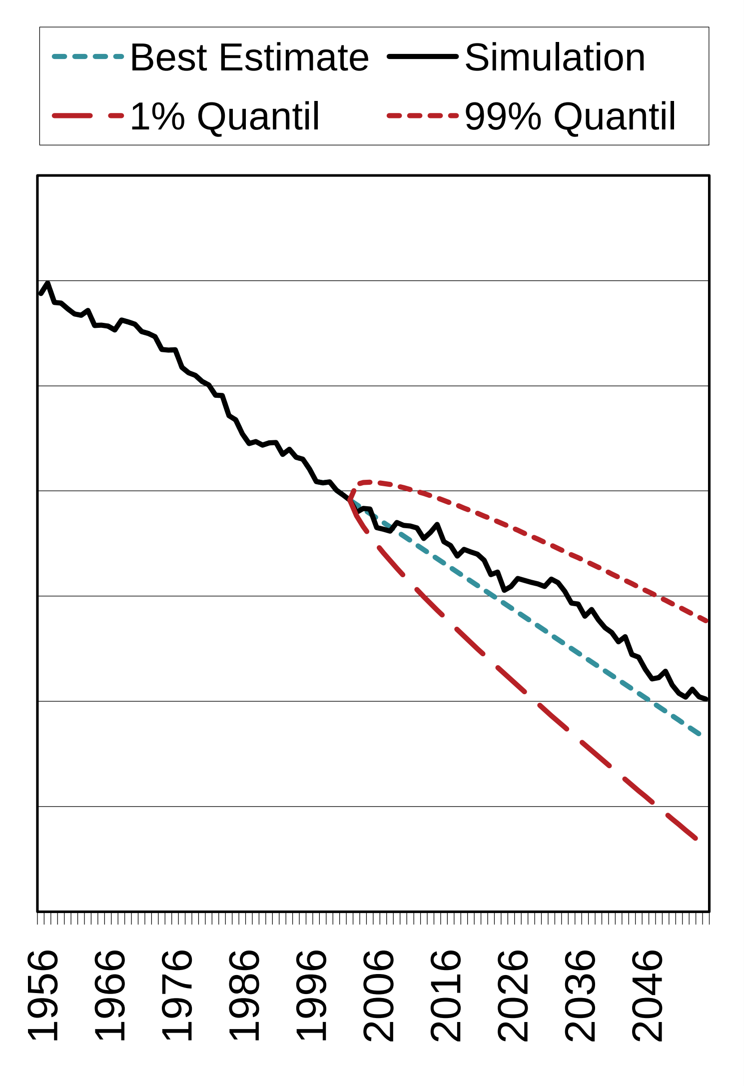
Munich RE

Verwende Standardmodelle für die Kalibrierung des Trends (häufig GLMs):

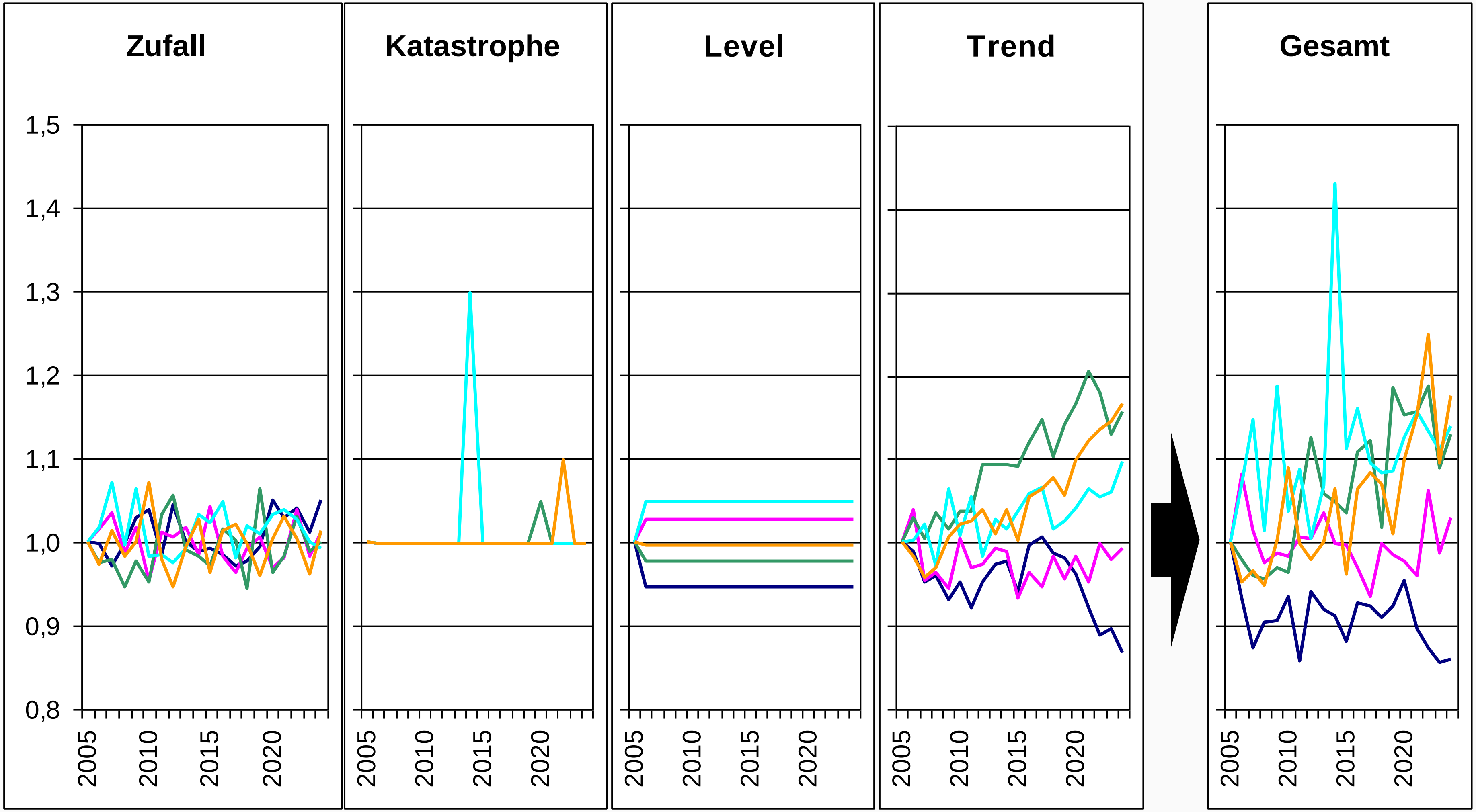
- Lee-Carter oder Haberman-Renshaw
- Cairns-Blake-Dowd

oder vergleichbare Ansätze…

1. Kalibriere das Modell
2. Erzeuge Pfade zukünftiger Trend-entwicklung durch Zeitreihen
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen



BRiSMA
Risikokomponenten eines Risikotreibers



Zufall · Katastrophe · Level · Trend = Gesamt

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Dr. Frank Schiller

Statistik für Biometrische Analysen
Initial Exposure

Folge der Kohorte von Policen im Startjahr (schwarze Raute)

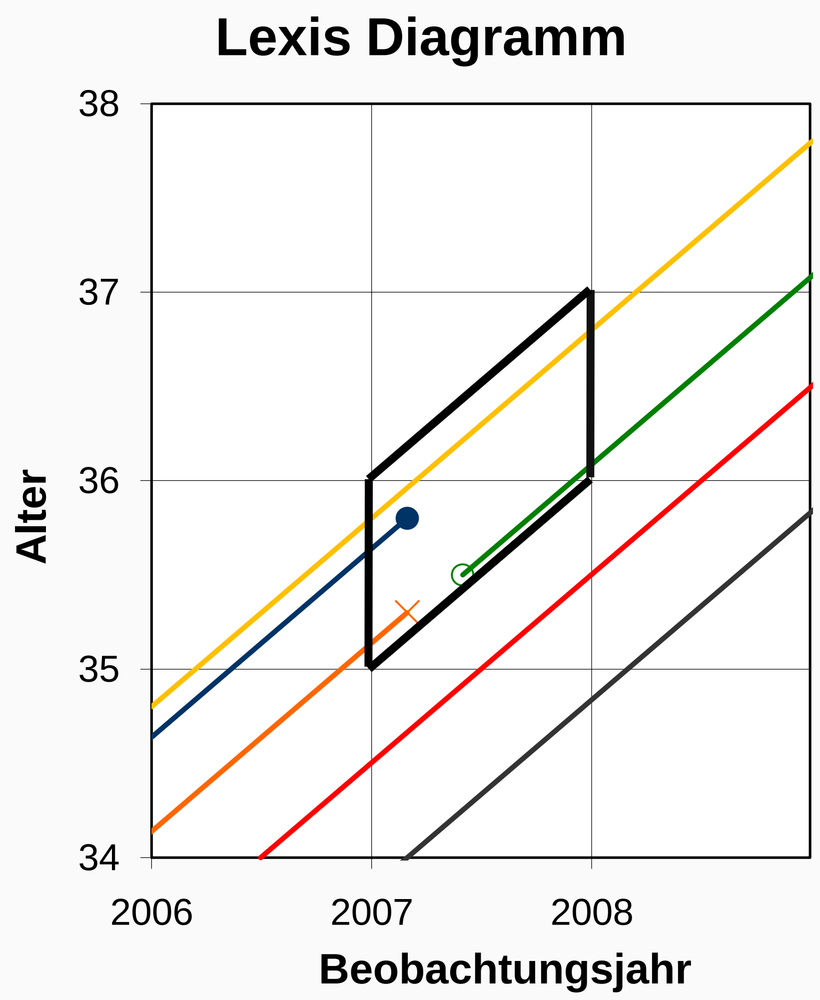
$$q_{35} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Vorteile:

- Einfach zu berechnen
- Exakte Wahrscheinlichkeit für abgeschlossene Kohorten (z.B. Rentenversicherung)

Nachteile:

- Ohne Neugeschäft
- Ohne Storno oder andere Abgänge



Statistik für Biometrische Analysen
Central Exposure

Munich RE

Die “force of mortality” oder Sterberate μ_x

$$\mu_x = -\ln(1 - q_x)$$

ist die bedingte Wahrscheinlichkeit im nachfolgenden infinitesimalen Zeitintervall zu sterben, gegeben, dass die Person bereits das Alter *x* erreicht hat.

Andere Interpretation: “Steigung des Sterblichkeitsverlaufs”

Viele Sterbegesetze basieren auf dieser Größe:

- Gompertz (1825): $\mu_x(t) = B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Makeham (1860): $\mu_x(t) = A + B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Perks (1932): $\mu_x(t) = \dfrac{A + Be^{\beta(x+t)}}{1 + Ce^{\beta(x+t)}}$

Central Exposure

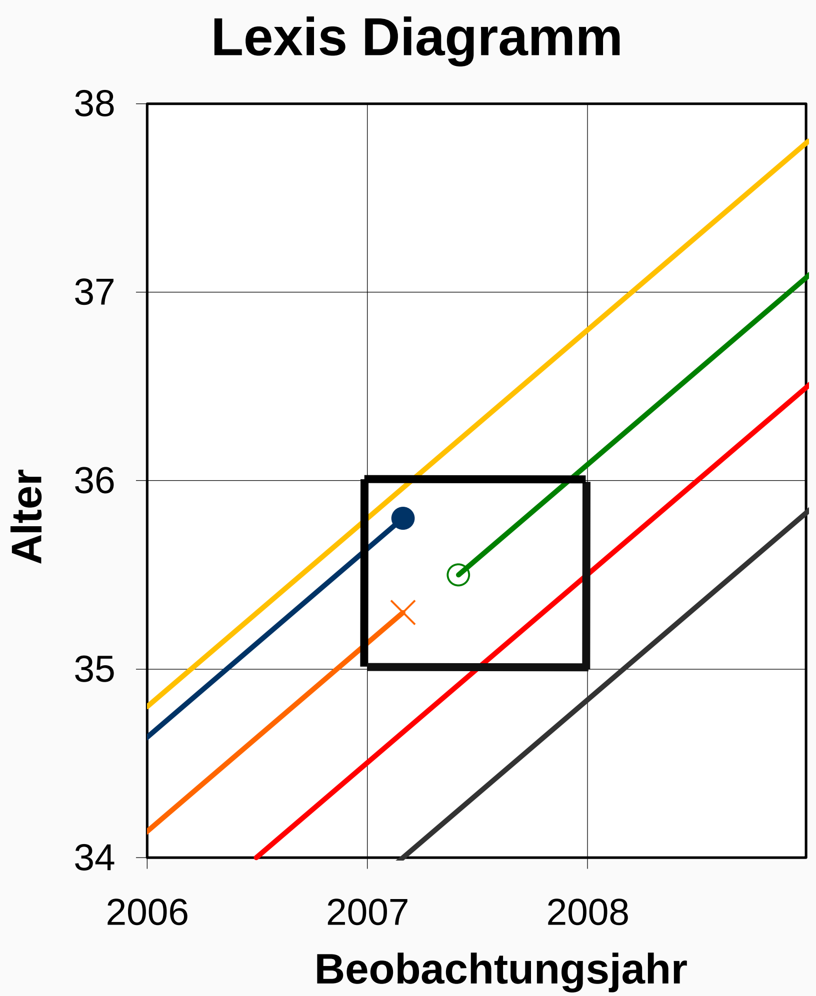
Summiere die Längen aller Linien im markierten Rechteck

gelb:	0.2 (danach 36)
blau:	0.2 (danach Storno)
orange:	0.2 (danach Tod)
grün:	0.5 (Neugeschäft)
rot:	0.5 (davor 34)

Schätze zuerst μ_x, dann daraus q_x

$$\mu_{35} = \frac{\#\text{Tote}}{\#\text{Exposure}} = \frac{1}{1.6} = 0.625$$

$$q_{35} = 1 - \exp(-\mu_{35}) = 0.465$$



Statistik für Biometrische Analysen
Central Exposure

Vorteile:

- Zählt Neugeschäft und Storno mit exaktem Exposure
- Gut analysiert und verstanden in akademischer Welt
- Schätzer für Sterbewahrscheinlichkeit ist im Interval [0,1]
- Schätzer hat angenehme statistische Eigenschaften
- Kann als Basis für Generalisierte Lineare Modelle verwendet werden

Nachteile:

- Oft nur wenig bekanntes Verfahren

Generalisierte Lineare Modelle
Die Theorie

Munich RE

GLMs sind durch drei Komponenten bestimmt.

- **zufällige Komponente:**

  Response Y_i unabhängig mit Verteilung aus der exponentiellen Familie mit Erwartungswert μ_i

- **systematische Komponente**:

  linearer Prädiktor: $\eta_i = x_i^T\beta = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik}$

  mit $x_i = (1,x_{i1},..,x_{ik})^T$

- **Linkfunktion**: $g(\mu_i) = \eta_i$

  verbindet den linearen Prädiktor η_i mit dem Erwartungswert μ_i

Generalisierte Lineare Modelle
für die Lebensversicherung

Munich RE

Die drei Komponenten der GLMs in der Lebensversicherung.

- **zufällige Komponente:**

  Response Y_i modelliert Anzahl der Toten

  „Poisson-Modell" für Central Exposure Ansatz

- **systematische Komponente**:

  linearer Prädiktor: $\eta_i = x_i^T\beta$

- **Linkfunktion**: $\log(\mu_i) = \eta_i$

  $\mu_i = \text{Exposure}_i \cdot \exp(\eta_i) = \exp(\log(\text{Exposure}_i) + x_i^T\beta)$

  mit „Offset" $\log(\text{Exposure}_i)$

Best Estimates für ein Portfolio
Modellierung durch GLM

$$\mu = \text{Exposure} \cdot \exp(\beta_0 f(\text{Alter}) + (\beta_1 + \beta_2 \text{Alter} + \beta_3 \text{Alter}^2) \text{Raucher} + \\ + \beta_4 \text{Geschlecht})$$

mit

μ	erwartete Anzahl der Toten
β_i	lineare Faktoren zur Anpassung des GLM
Alter	in Jahren
f	Polynom oder an Portfolio angepasste Funktion (z.B. lokaler Ausgleich, Whittaker-Henderson)
Raucher	0 bei Nichtraucher, 1 bei Raucher
Geschlecht	0 bei Männern, 1 bei Frauen

Kalibrierung des Irrtumsrisikos
Theorie

Munich RE

Asymptotisches Ergebnis für die Schätzer β:

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}}) \quad \text{mit} \quad \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i' \hat{\mu}_i\right)^{-1}$$

- $x_i'\hat{\beta}$ asymptotisch Normalverteilt mit Varianz:

$$Var(x_i'\hat{\beta}) = x_i'\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} x_i$$

- Symmetrisches (1-α)% Konfidenzintervall für $x_i'\beta$:

$$x_i'\hat{\beta} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{Var(x_i'\hat{\beta})}$$

mit $z_{\alpha/2}$ dem $\alpha/2$ - Quantil der Standardnormalverteilung,
$z_{\alpha/2} = 1{,}96$ für $\alpha = 5\%$

Kalibrierung des Trendrisikos nach Cairns, Blake, Dowd (2005)

Munich RE

Sterbegesetz: Vereinfachtes, diskretisiertes Perks Modell

$$ {}_1p_x(t) = \frac{1}{e^{A_1(t+1)+A_2(t+1)\cdot(x+t)} + 1} $$

Modellierung der Zeitabhängigkeit der Parameter $A(t) = (A_1(t), A_2(t))'$ durch diskretisierte, korrelierte zweidimensionale Brownsche Bewegung mit Drift

$A(t+1) = A(t) + \theta + C \cdot B(t)$

θ	zeitinvariante Drift
C	zeitinvariante Korrelationsmatrix
$B(t)$	zweidimensionale Standard Brownsche Bewegung

Kalibrierung und Prognose zweistufig:

1. Sterbegesetz an Daten anpassen

2. An Zeitreihe der Parameter Modell anpassen und damit Prognose ableiten

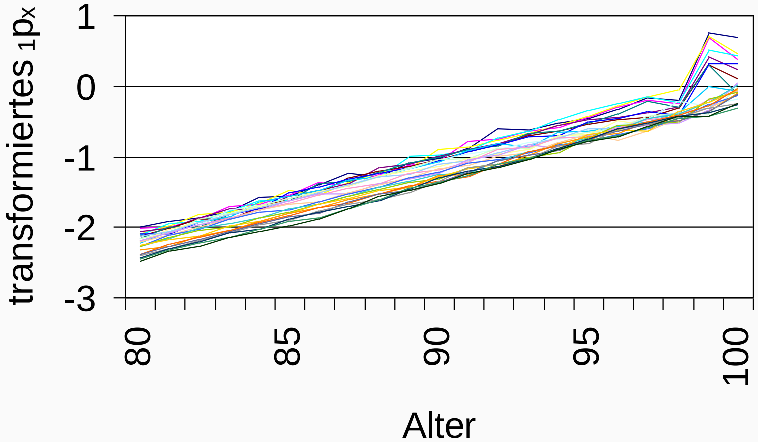
Kalibrierung des Trendrisikos nach Cairns, Blake, Dowd (2005)

1. Schritt (Sterbegesetz an Historie anpassen):

Innerhalb einer Generation t ist die von vorgeschlagene Transformierte von ${}_1p_x(t)$

$$\ln(1/{}_1p_x(t) - 1)$$

annähernd linear.



2. Schritt (Diffusion an Parameter A_1 und A_2 anpassen):

Mit Least-Square- oder Maximum-Likelihood-Methode ergibt sich

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -0{,}038 \\ 0{,}0026 \end{pmatrix} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0{,}1986 & -0{,}0022 \\ -0{,}0022 & 0{,}00048 \end{pmatrix}$$