# Die Anwendung von Generalisierten Linearen Modellen in der Lebensversicherung

Versicherungsmathematisches Kolloquium
der LMU München

Dr. Frank Schiller

13. Juli 2009

Münchener Rück
Munich Re Group

# Pricing und Valuation in der Lebensversicherung

Münchener Rück
Munich Re Group

# Beispiel eines modernen Kontrollzyklus

Münchener Rück
Munich Re Group

## Pricing und Valuation

### Modelle kalibrieren

- Biometrische Analysen und aktuarielle Methoden
- Medizinische und demografische Daten

### Modelle auswerten

- Bilanzielle Gewinnanalysen
- Embedded Value
- ALM
- Risikomodell

### Ergebnisse bewerten

- Test auf statistische Signifikanz
- Planung und Prognose
- Risikomanagement

# Biometrische Analysen in den Market Consistent Embedded Value Principles

Münchener Rück
Munich Re Group

**Principle 11:**

The assessment of appropriate assumptions for future experience should have regard to past, current and expected future experience and to any other relevant data.

The assumptions should be *best estimate and entity specific rather than being based on the* assumptions a market participant would use. Changes in future experience should be allowed for in the *VIF when sufficient evidence exists. The assumptions should be actively reviewed.*

**Kontrollzyklus und Biometrische Analysen sind in MCEV Principles verankert**

# Biometrische Analysen bei Solvency II

Münchener Rück
Munich Re Group

**Artikel 76 (2):**

Die Berechnung des besten Schätzwerts hat auf der Grundlage *aktueller und glaubwürdiger Informationen* sowie *realistischer Annahmen* zu erfolgen und stützt sich auf *angemessene versicherungsmathematische Methoden* und *statistische Techniken*.

**Artikel 82:**

Die Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen verfügen über Prozesse und Verfahren, mit denen sicher gestellt wird, dass die besten Schätzwerte und die Annahmen, die der Berechnung der besten Schätzwerte zu Grunde liegen, regelmäßig mit Erfahrungsdaten verglichen werden.

**Best Estimate und Kontrollzyklus auch in Solvency II gefordert**

# Biometrische Analysen:
# Traditioneller Ansatz

Münchener Rück
Munich Re Group

# Statistik für Biometrische Analysen
# Sterberaten oder -wahrscheinlichkeiten

Münchener Rück
Munich Re Group

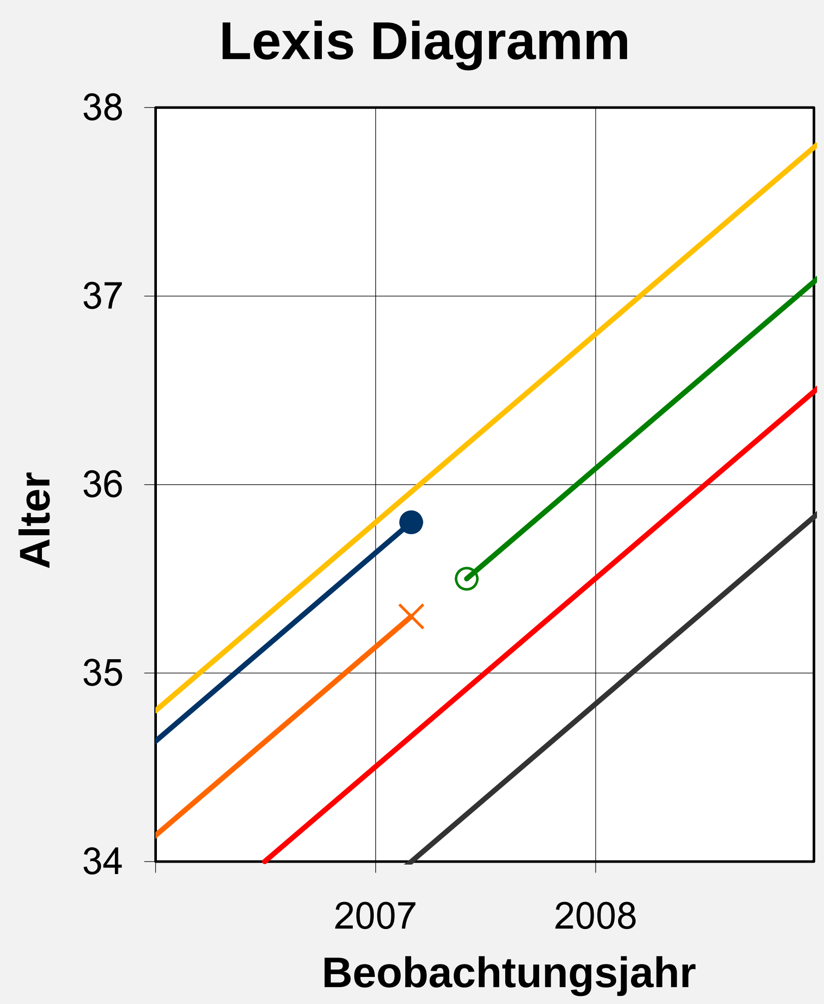
Naiver Ansatz SterbeWSK *q* zu schätzen

$$q = \frac{\#\,\text{Tote}}{\#\,\text{Lebende}}$$

- \# Tote: einfach abzählen
- \# Lebende: nicht eindeutig bestimmbar

Mögliche Ansätze die Anzahl der Lebenden / das Exposure zu bestimmen

1. Aktuarieller Ansatz (nach Gerber)
2. Initial Exposure
3. Central Exposure



# Statistik für Biometrische Analysen
# Central Exposure

Die “force of mortality” oder Sterberate $\mu_x$

$$\mu_x = -\ln(1 - q_x)$$

ist die bedingte Wahrscheinlichkeit im nachfolgenden infinitesimalen Zeitintervall zu sterben, gegeben, dass die Person bereits das Alter *x* erreicht hat.

Andere Interpretation: “Steigung des Sterblichkeitsverlaufs”

Viele Sterbegesetze basieren auf dieser Größe:

- Gompertz (1825): $\mu_x(t) = B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Makeham (1860): $\mu_x(t) = A + B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Perks (1932): $\mu_x(t) = \dfrac{A + Be^{\beta(x+t)}}{1 + Ce^{\beta(x+t)}}$

Münchener Rück
Munich Re Group

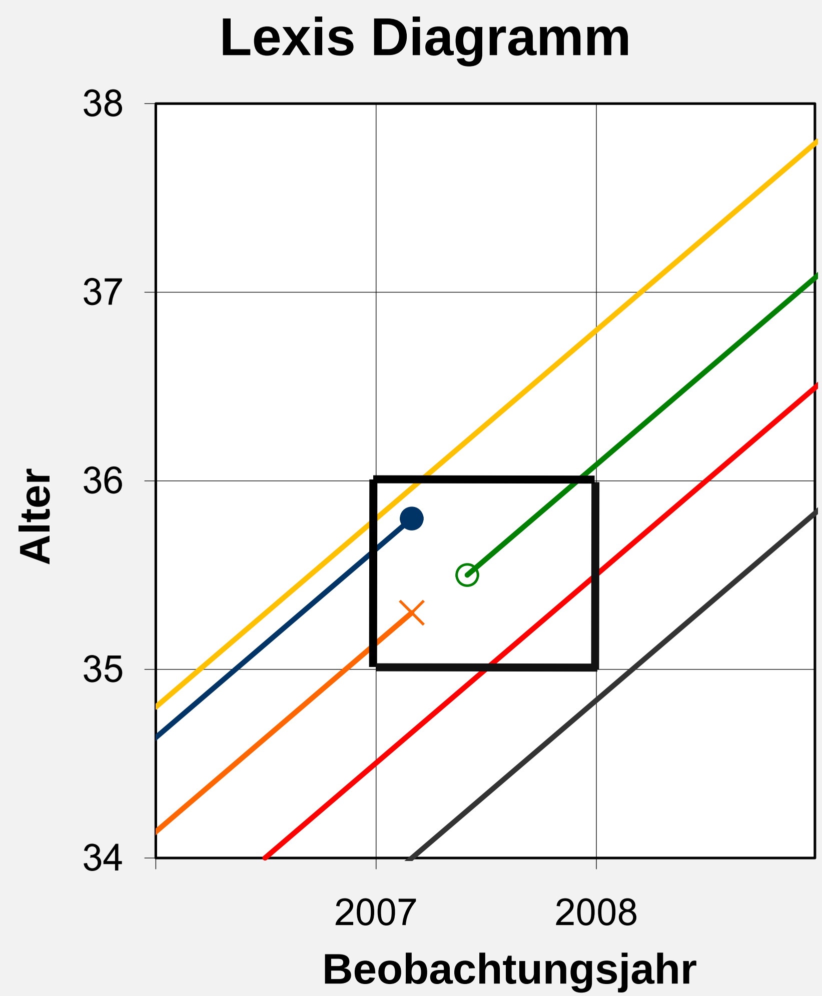
Summiere die Längen aller Linien im markierten Rechteck

gelb: 0.2 (danach 36)
blau: 0.2 (danach Storno)
orange: 0.2 (danach Tod)
grün: 0.5 (Neugeschäft)
rot: 0.5 (davor 34)

Schätze zuerst $\mu_x$, dann daraus $q_x$

$$\mu_{35} = \frac{\#\text{Tote}}{\#\text{Exposure}} = \frac{1}{1.6} = 0.625$$

$$q_{35} = 1 - \exp(-\mu_{35}) = 0.465$$



# Central Exposure



**Vorteile**:

- Zählt Neugeschäft und Storno mit exaktem Exposure
- Gut analysiert und verstanden in akademischer Welt
- Schätzer hat angenehme statistische Eigenschaften
- Schätzer für Sterbewahrscheinlichkeit ist im Interval [0,1]
- Kann als Basis für Generalisierte Lineare Modelle verwendet werden

**Nachteile:**

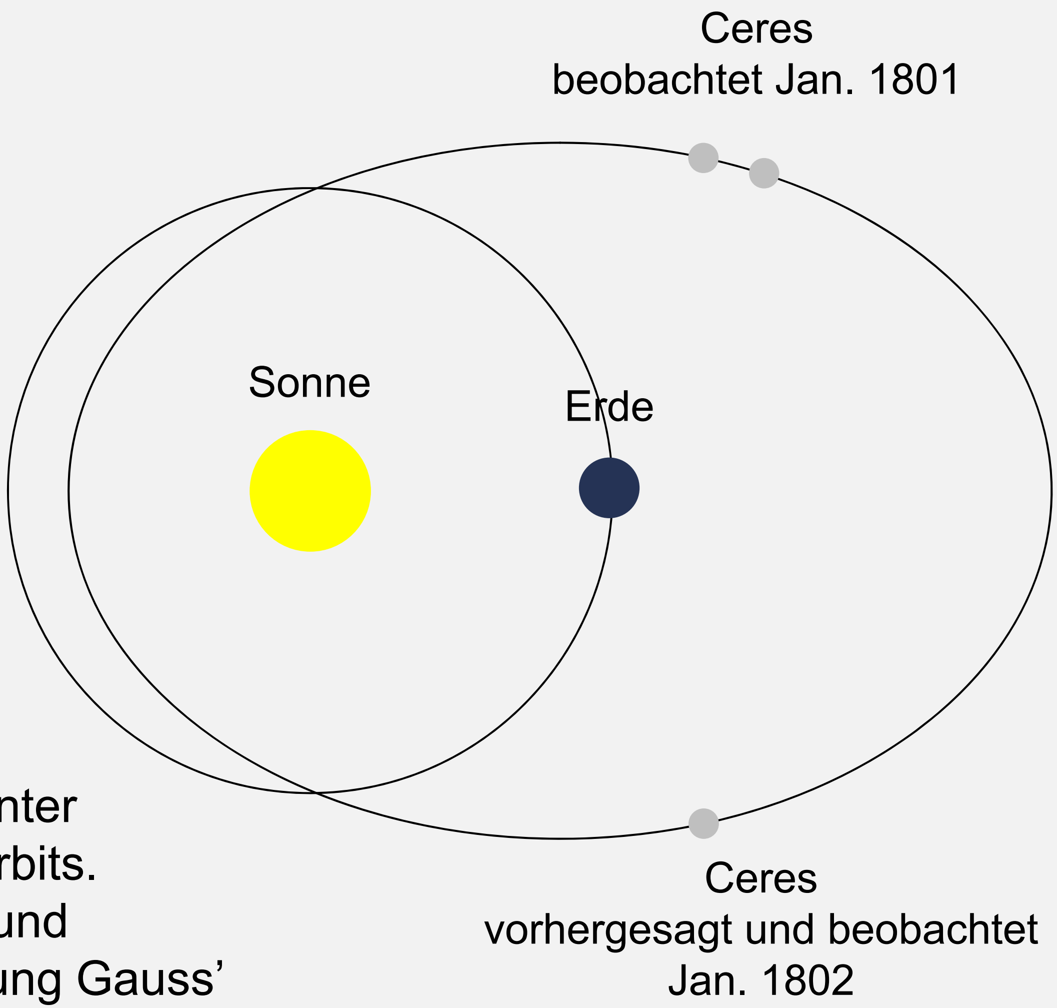
- Oft nur wenig bekanntes Verfahren

# Biometrische Analysen:
# Anwendung von Generalisierten Linearen Modellen

# Generalisierte Lineare Modelle (GLM)

Münchener Rück
Munich Re Group

C. F. Gauss 1777-1855




Gauss erfand Lineare Modelle unter anderem zur Berechnung von Orbits. GLMs wurden 1972 von Nelder und Wedderburn als Verallgemeinerung Gauss' Ansatz entwickelt.

# Best Estimates für ein Portfolio Risikolebensversicherung mit Raucherstatus

Münchener Rück
Munich Re Group

Portfoliodaten einer deutschen Lebenserstversicherung:

| | |
|---|---|
| Altersintervall: | 18 - 65 |
| Exposure: | 2 Millionen Policenjahre (NR, m) |
| | 1 Million Policenjahre (NR, f) |
| | 0,3 Millionen Policenjahre (R, m) |
| | 0,1 Millionen Policenjahre (R, f) |
| Beobachtete Zahl Toter: | Sehr kleine Anzahl für weibliche Raucher |

**Traditionelle Methoden können für die Herleitung von Best Estimates nicht angewendet werden**

# Best Estimates für ein Portfolio
# Anpassung für Männer

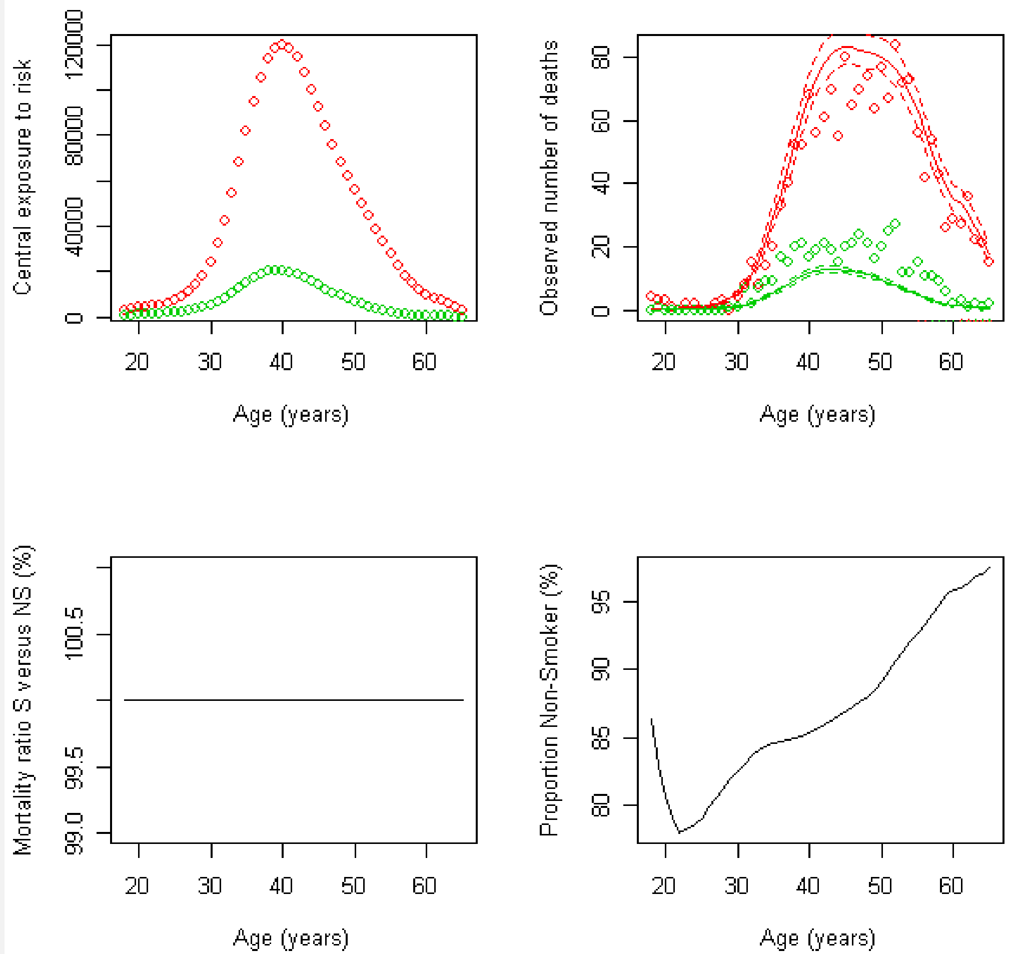
**Problem:**

Kleine Anzahl an Toter erlaubt nicht die Verwendung traditioneller Ansätze.

**Erster Schritt:**

Anpassung durch GLMs ohne Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus

► Fit nicht zufriedenstellend



# Best Estimates für ein Portfolio
# Anpassung für Männer nach Raucherstatus

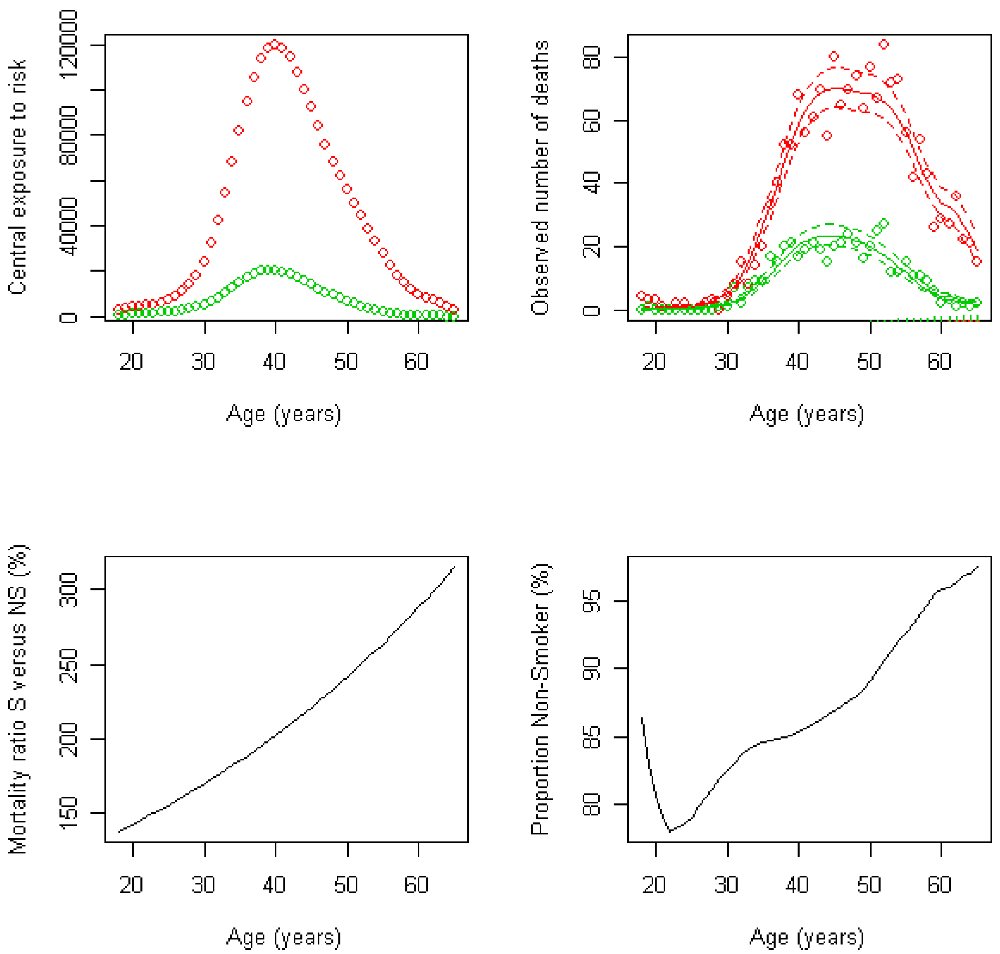
Münchener Rück
Munich Re Group

**Zweiter Schritt:**

Anpassung durch GLMs mit Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus.

Dabei quadratische Abhängigkeit nach Alter angesetzt.

► Fit angemessen



# Best Estimates für ein Portfolio
# Gelichzeitige Anpassung für Männer und Frauen

Münchener Rück
Munich Re Group

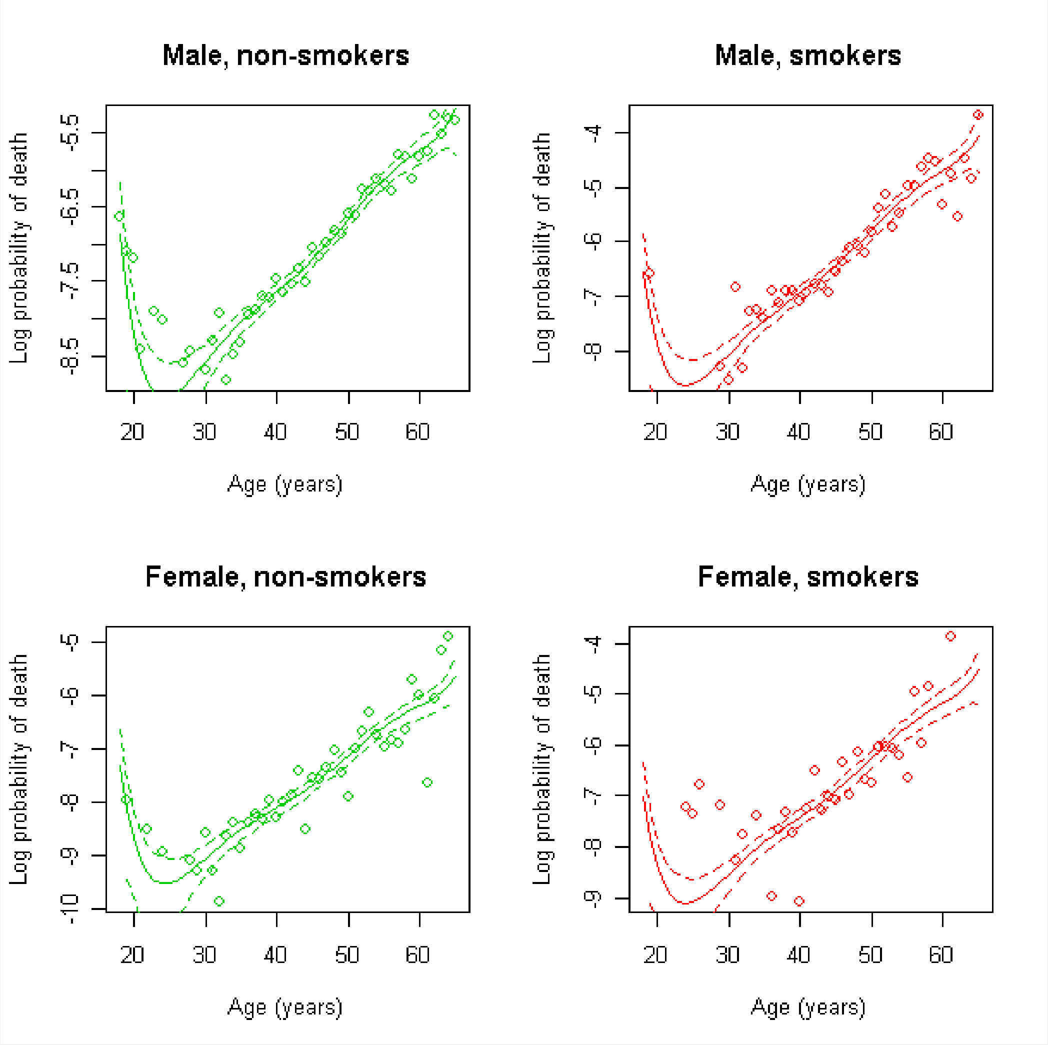
**Dritter Schritt:**

Anpassung mit Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus

**und**

Verwende gleiche Grundform für beide Geschlechter

- Angemessene Anpassung auch für kleine Anzahl Toter bei Frauen möglich



# Generalisierte Lineare Modelle
## Die Theorie

GLMs sind durch drei Komponenten bestimmt.

- **zufällige Komponente:**

  Response $Y_i$ unabhängig mit Verteilung aus der exponentiellen Familie mit Erwartungswert $\mu_i$

- **systematische Komponente**:

  linearer Prädiktor: $\eta_i = x_i'\beta = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik}$

  mit $x_i = (1, x_{i1}, .., x_{ik})'$

- **Linkfunktion**: $g(\mu_i) = \eta_i$

  verbindet den linearen Prädiktor $\eta_i$ mit dem Erwartungswert $\mu_i$

# Generalisierte Lineare Modelle für die Lebensversicherung

Münchener Rück
Munich Re Group

Die drei Komponenten der GLMs in der Lebensversicherung.

- **zufällige Komponente:**

  Response $Y_i$ modelliert Anzahl der Toten

  „Poisson-Modell“ für Central Exposure Ansatz

- **systematische Komponente**:

  linearer Prädiktor: $\eta_i = x_i'\beta$

- **Linkfunktion**: $\log(\mu_i) = \eta_i$

  $\mu_i = \text{Exposure}_i \cdot \exp(\eta_i) = \exp(\log(\text{Exposure}_i) + x_i'\beta)$

  mit „Offset“ $\log(\text{Exposure}_i)$

## Best Estimates für ein Portfolio
## Modellierung durch GLM

Münchener Rück
Munich Re Group

$$\mu = \text{Exposure} \cdot \exp(\beta_0 f(\text{Alter}) + (\beta_1 + \beta_2 \text{Alter} + \beta_3 \text{Alter}^2) \text{Raucher} + \\ + \beta_4 \text{Geschlecht})$$

**mit**

| | |
|---|---|
| $\mu$ | erwartete Anzahl der Toten |
| $\beta_i$ | lineare Faktoren zur Anpassung des GLM |
| Alter | in Jahren |
| f | Polynom oder an Portfolio angepasste Funktion (z.B. lokaler Ausgleich, Whittaker-Henderson) |
| Raucher | 0 bei Nichtraucher, 1 bei Raucher |
| Geschlecht | 0 bei Männern, 1 bei Frauen |

# Risikomodell mit
# Generalisierten Linearen Modellen kalibrieren

Münchener Rück
Munich Re Group

# BRiSMA
# Risikomodell / stochastische Simulation

**BRiSMA (Biometric Risk – Stochastic Modeling Approach)**
**– grundlegende Idee einer stochastischen Modellierung**

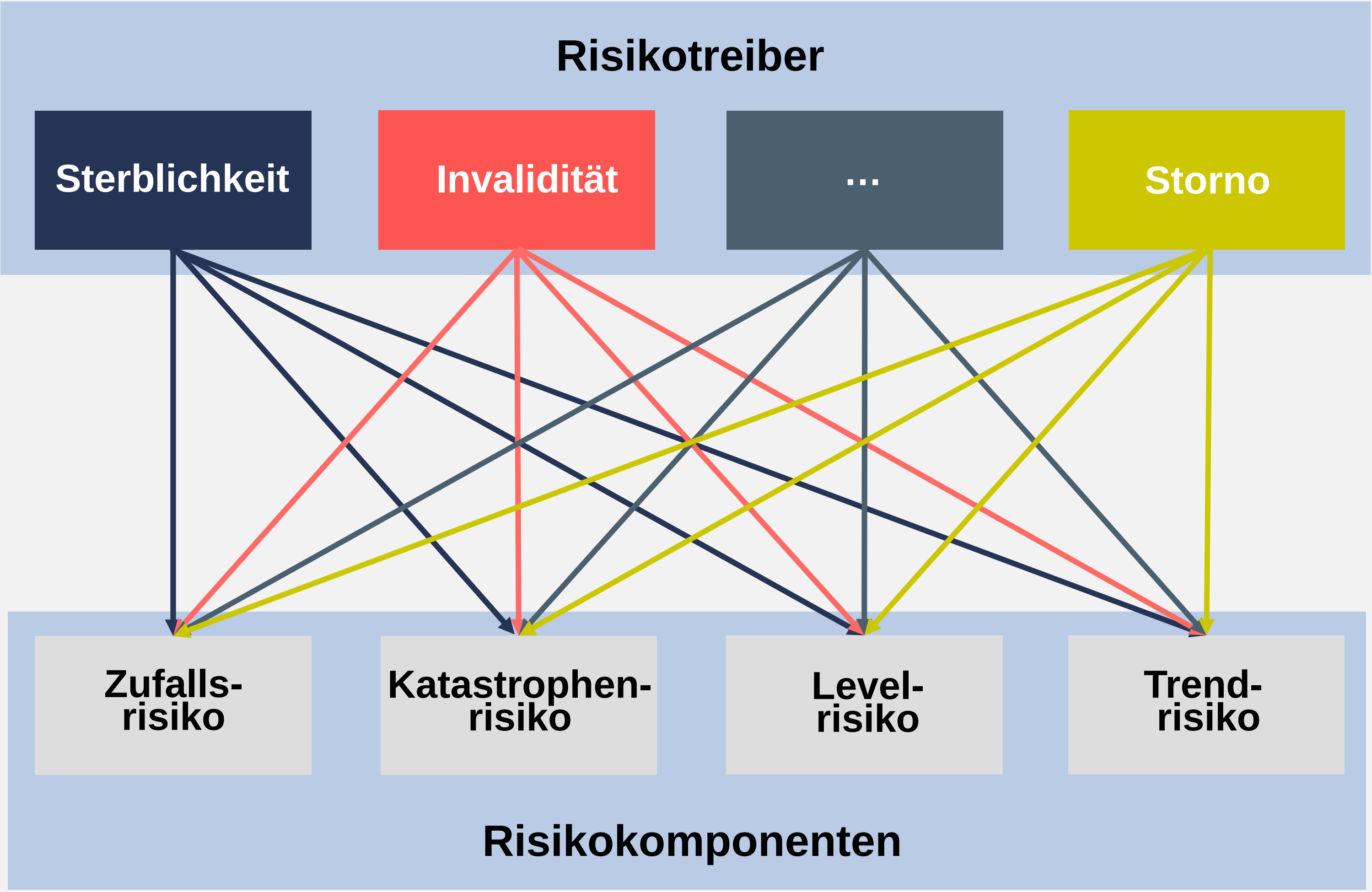
Für jeden Risikotreiber werden Simulationen durch die folgende Vorschrift generiert:

**Simulierter Wert = Best Estimate Wert · Faktor für Schwankung**

Die Zufallsvariablen der Faktoren für die Schwankung sind auf Erwartungswert = 1 normiert, um die Simulation auf den Best Estimate zu zentrieren.

# BRiSMA
# Wesentliche Risikotreiber und -komponenten





# BRiSMA
# Risikokomponenten im Detail

**Risiko-komponenten**

| | |
|---|---|
| **Zufalls-risiko** | Jährliche, zufällige Fluktuationen<br>Kalibriert auf die Schwankung der Gesamtschadenverteilung des Portfolios |
| **Katastrophen-risiko** | Z.B. Pandemien, Naturgefahren<br>Kalibriert auf historische Großschäden und Experteneinschätzung |
| **Irrtums-risiko** | Fehleinschätzung des Best Estimate durch schlechte Datenqualität, Basisrisiko etc.<br>Kalibriert mit biometrischen Analysen und Markteinschätzung |
| **Trend-risiko** | Langzeitentwicklung eines ansonsten korrekt geschätzten Best Estimate<br>Kalibriert auf historischen Trendentwicklungen und Experteneinschätzung |

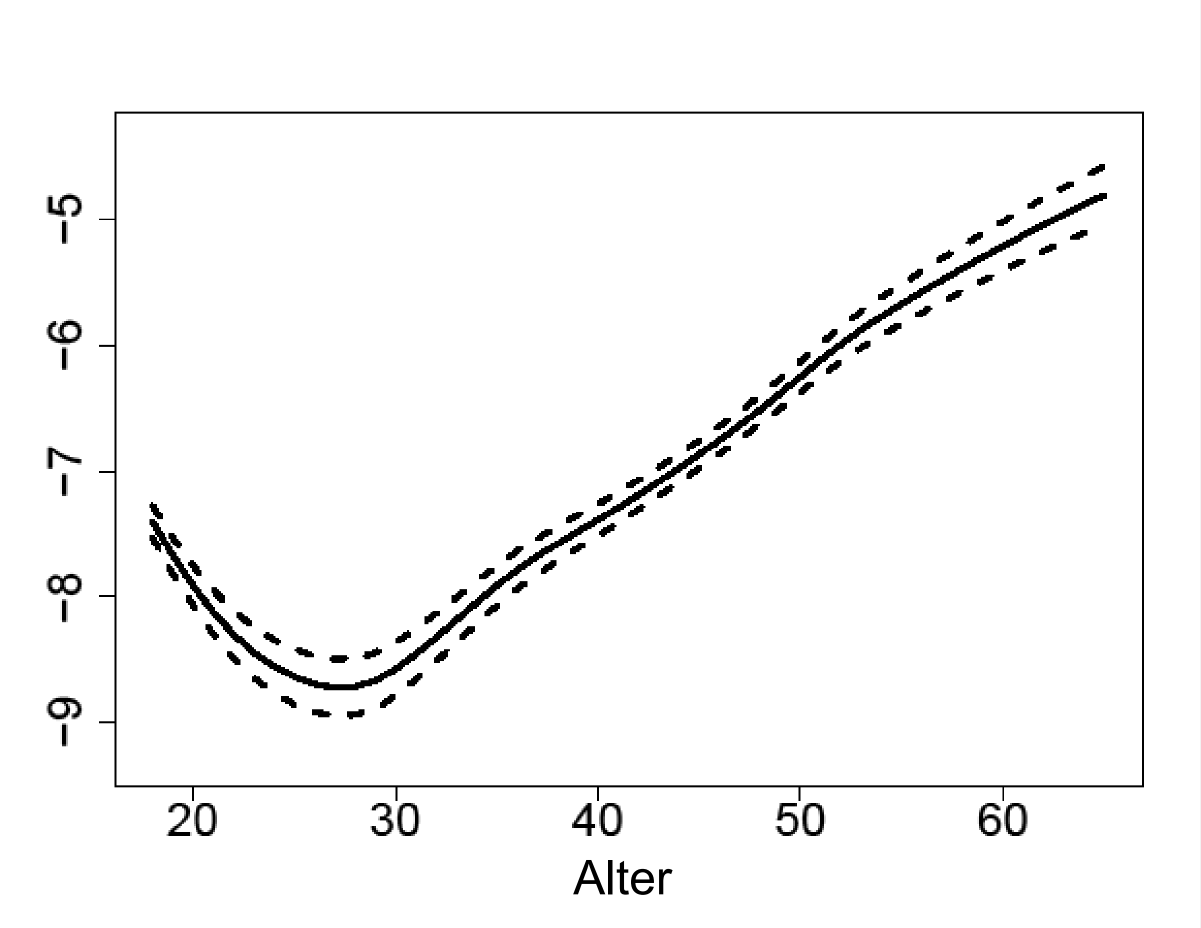
**Anwendung von GLMs für Kalibrierung von Irrtums- und Trendrisiko**

# BRiSMA
# Kalibrierung des Irrtumsrisikos

Münchener Rück
Munich Re Group

Logarithmus des Best Estimate mit 95% Konfidenzintervall:

1. Bestimme Konfidenz-intervall mit GLM
2. Wende Poisson Modell für die Simulation des Levelrisikos an.
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen
4. Modelliere ggf. Basisrisiko entsprechend



# Kalibrierung des Irrtumsrisikos
# Theorie



Asymptotisches Ergebnis für die Schätzer *β*:

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}}) \quad \text{mit} \quad \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i x_i' \hat{\mu}_i \right)^{-1}$$

- $x_i'\hat{\beta}$ asymptotisch Normalverteilt mit Varianz:

$$\widehat{Var}(x_i'\hat{\beta}) = x_i'\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} x_i$$

- Symmetrisches (1-α)% Konfidenzintervall für $x_i'\beta$:

$$x_i'\hat{\beta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{Var(x_i'\hat{\beta})}$$

mit $z_{\alpha/2}$ dem $\alpha/2$ - Quantil der Standardnormalverteilung,

$z_{\alpha/2} = 1{,}96$ für $\alpha = 5\%$

# BRiSMA
# Kalibrierung des Trendrisikos

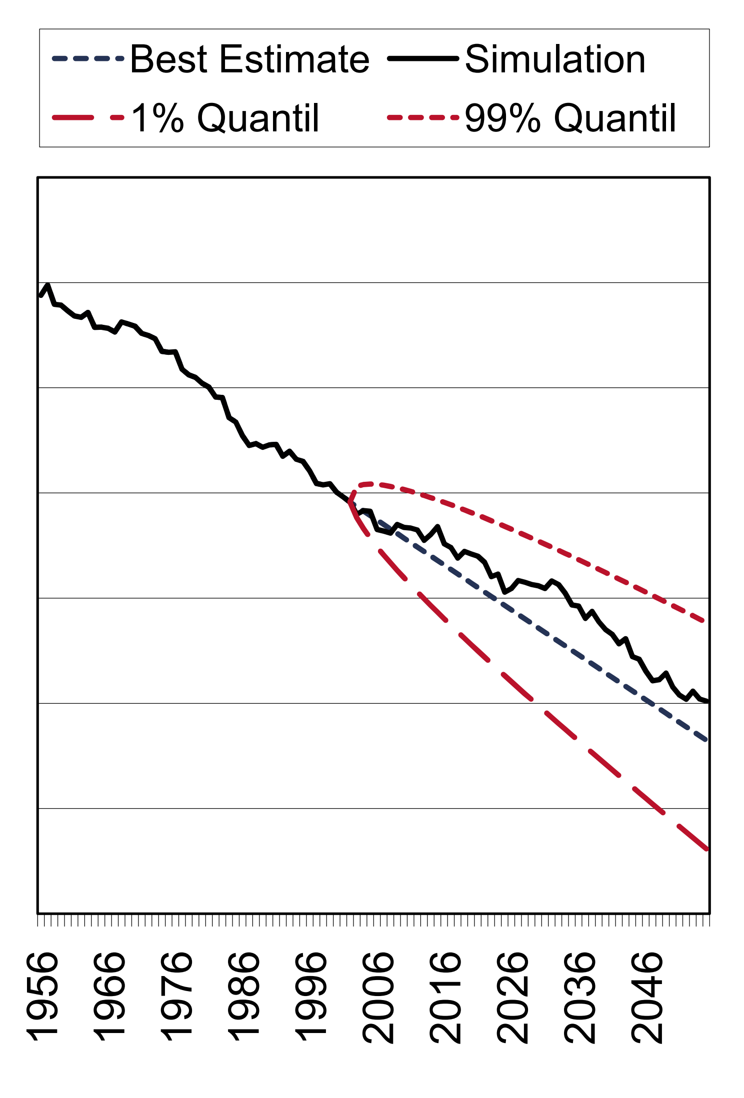
Münchener Rück
Munich Re Group

Verwende Standardmodelle für die Kalibrierung des Trends (häufig GLMs):

- Lee-Carter oder Haberman-Renshaw
- Cairns Blake Dowd

oder vergleichbare Ansätze.

1. Kalibriere das Modell
2. Erzeuge Pfade zukünftiger Trend-entwicklung durch Zeitreihen
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen



# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Dr. Frank Schiller

Münchener Rück
Munich Re Group

# Literatur


Byrne, F., Farr, I. (2007), *Risk Management in Strategic Decision Making*, Emphasis Magazine 2007 No. 3

CFO Forum (2008), *Market Consistent Embedded Value Principles*. http://www.cfoforum.nl/pdf/mcev_principles_and_guidance.pdf

Forfar, D. et al (1988), *On Graduation by Mathematical Formula*. Journal of Institute of Actuaries Students' Society, 115, 1-119.

Gerber, H. (1997), *Life Insurance mathematics*. Springer, 3rd edition

Goford, J. (1985), *The Control Cycle: Financial Control of a Life Assurance Company*. Journal of Institute of Actuaries Students' Society, 28, 94-114.

Haberman, S., Renshaw  A. (1996), *Generalized Linear Models and Actuarial Science*. The Statistician, 45 No. 4, 407-437

Kommission der europäischen Gemeinschaften (2008), *Solvabilität II,* KOM(2008) 119, 2007/0143 (COD)