

# Interne Risiko-Modelle kalibrieren mit Generalisierten Linearen Modellen

Dr. Frank Schiller  
5. Mai 2009



Münchener Rück  
Munich Re Group

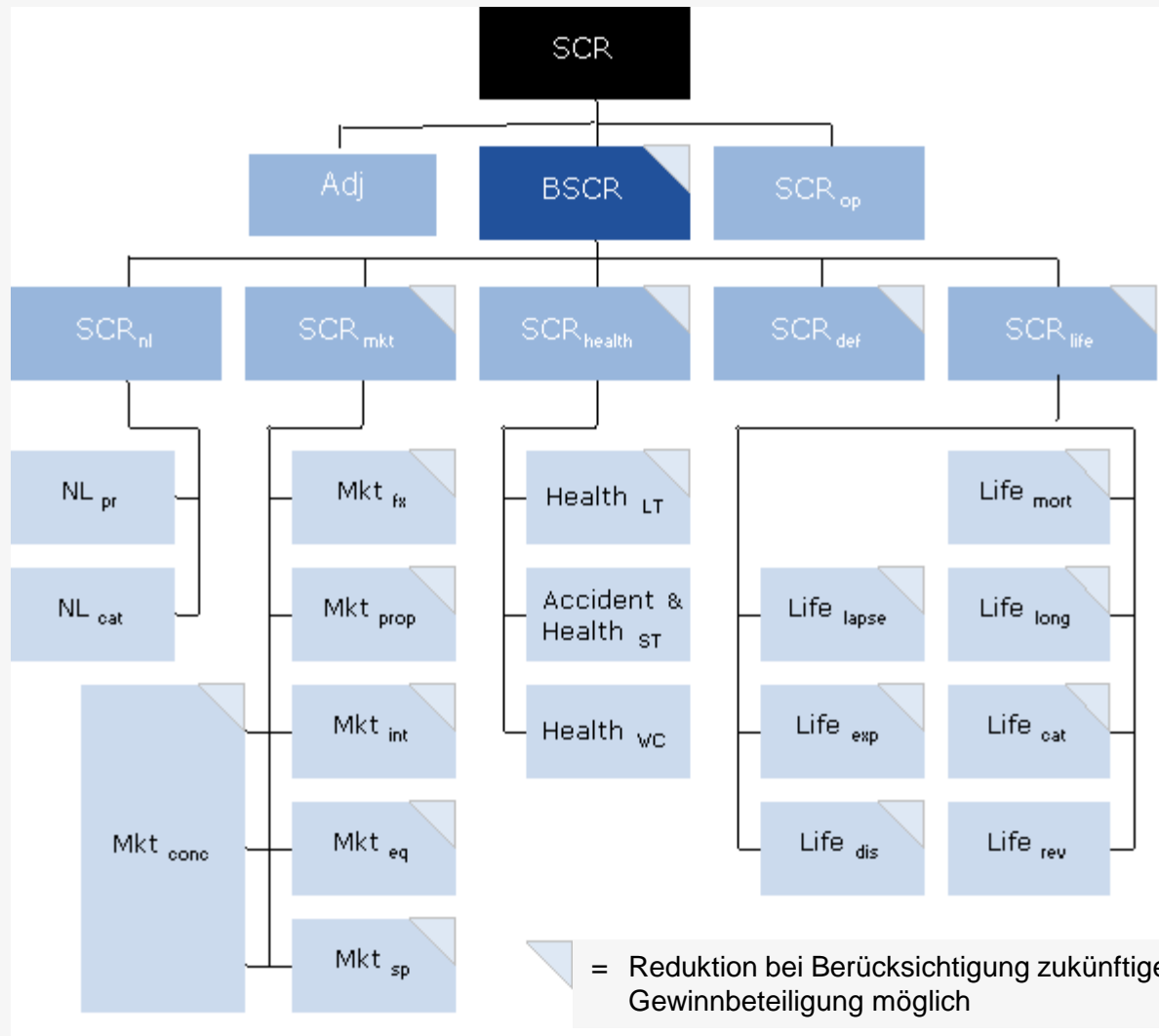


Risikomodell und Unternehmenssteuerung	3
Biometrische Analysen: Traditioneller Ansatz	11
Biometrische Analysen: Anwendung von GLMs	18
Risikomodell mit GLMs kalibrieren	27
Risikomanagement	34
Literatur	38

# Risikomodell und Unternehmenssteuerung



# Beispiel für ein Risikomodell Solvency II



**SCR: Solvency Capital Requirement**

**BSCR: Basic SCR**

**Adj: Adjustments**

**SCR<sub>op</sub>: Operational risk**

**Non-Life**

- Prämien und Reserven
- Katastrophen

**Markt**

- Währung
- Immobilien
- Fixed interest
- Aktien
- Zins-Spread
- Kumul

**Kranken**

- Langzeit UW
- Kurzzeit UW
- Arbeiterunfall

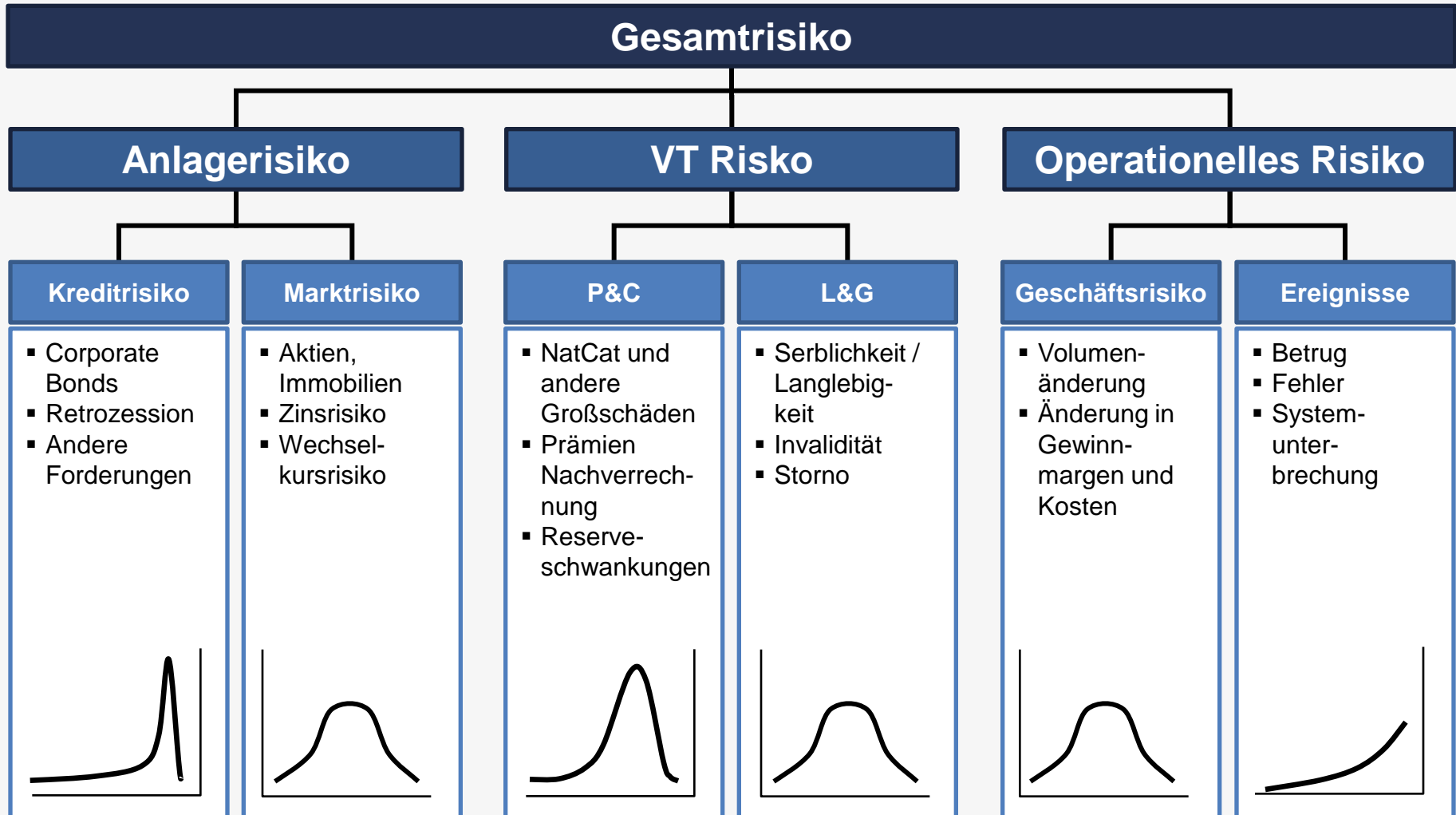
**Default**

**Leben**

- Rentenanpassung
- Sterblichkeit
- Langlebigkeit
- Berufsunfähigkeit
- Storno
- Kosten
- Katastrophen

# Beispiel für ein internes Risikomodell

## Münchener Rück Risikomodell



**Identifizieren**

**Beschreiben**

**Erklären**

**Entscheidungsunterstützung**

- Risikokapital individuell gemäß der Risikostruktur des Unternehmens quantifizieren
- Beurteilen der Risikotragfähigkeit und Profitabilität.

**Interne Risikomodelle sind ein wichtiger Teil des Risikomanagements und der Unternehmenssteuerung**

# Internes Risikomodell

## Wie funktioniert ein stochastisches Modell?

**Stochastische Modelle** bestimmen das Risikokapital basierend auf Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Wesentliche Schritte sind:

### Modellbildung

Welche Größen sind im Modell zufällig und welche Abhängigkeiten bestehen?

### Modellkalibrierung

Wahrscheinlichkeitsverteilungen für zufällige Größen bestimmen – aussagekräftiges Datenmaterial!

### Modellauswertung

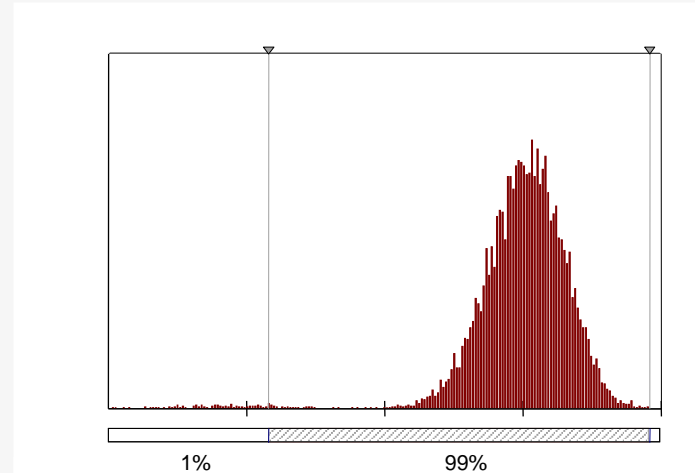
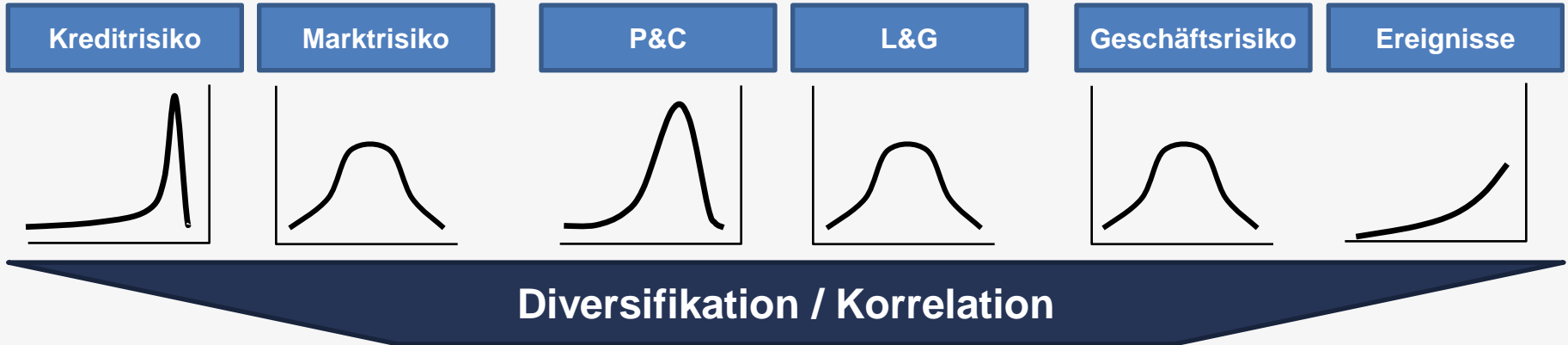
Analytische Auswertung und/oder Simulation

### Ergebnisaufbereitung

Risikokapital, Risikotragfähigkeit, Rentabilität  
Gesamtunternehmen, Teilsegmente, Produkte

# Internes Risikomodell

## Risiko Aggregation, Bewertung und Allokation



Allokation



# Internes Risikomodell und Solvency II

## Anforderungen an das Modell

- Vollständigkeit (evtl. Partialmodell)
- Transparenz
- Zuverlässigkeit und Richtigkeit („Statistical Quality Test“)
- Konsistenz („Calibration Test“)
- Mathematische Verfahren
- Validierung

## Anforderungen an die Prozesse

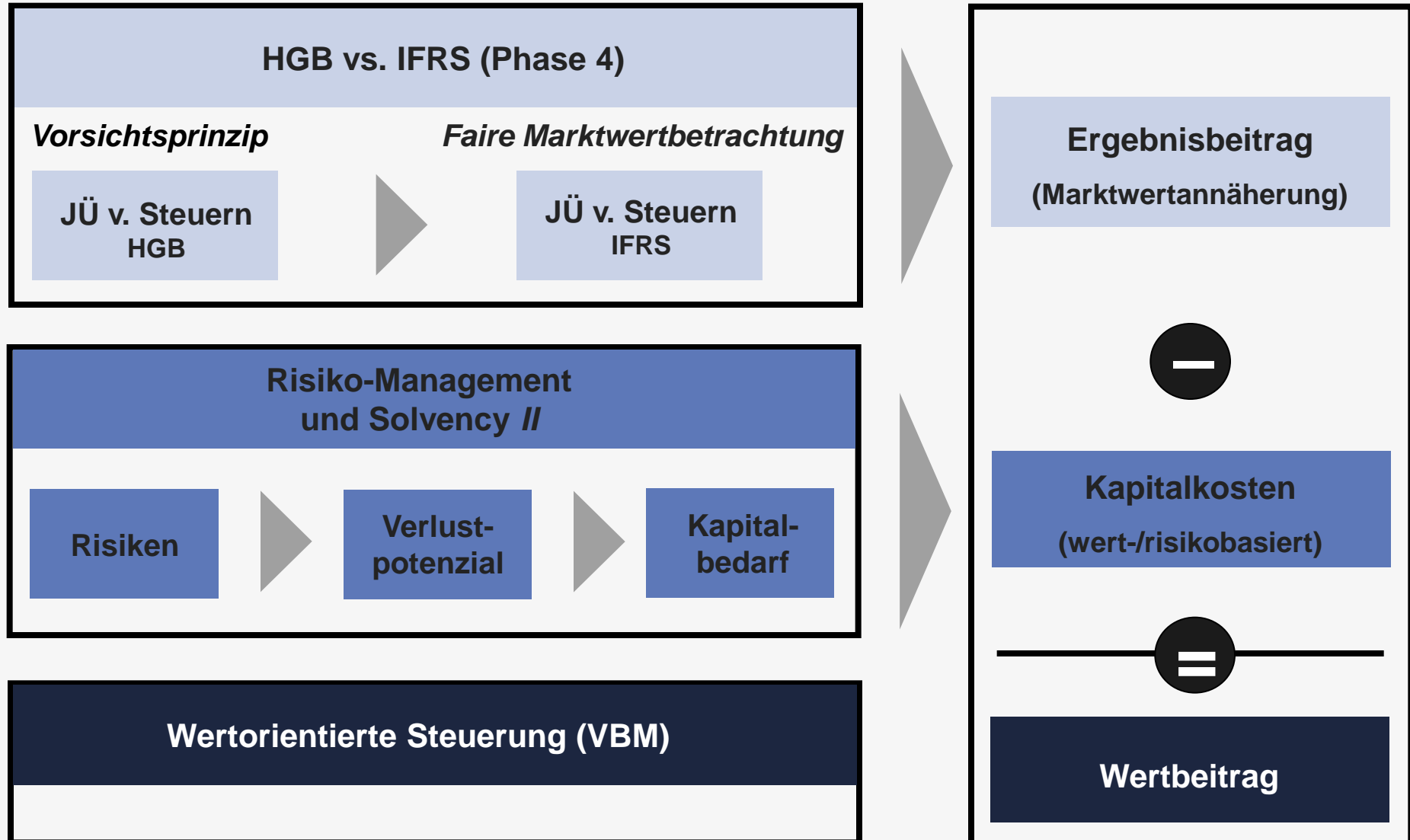
- Einsatz zur Unternehmenssteuerung („Use Test“)
- Aktive Beteiligung des Managements
- Qualifikation der Mitarbeiter
- Dokumentation
- Zertifizierung



**Kosten / Nutzen!?**

# Risiko-Management und Solvency II

## wertorientierte Ergebnisrechnung und -steuerung

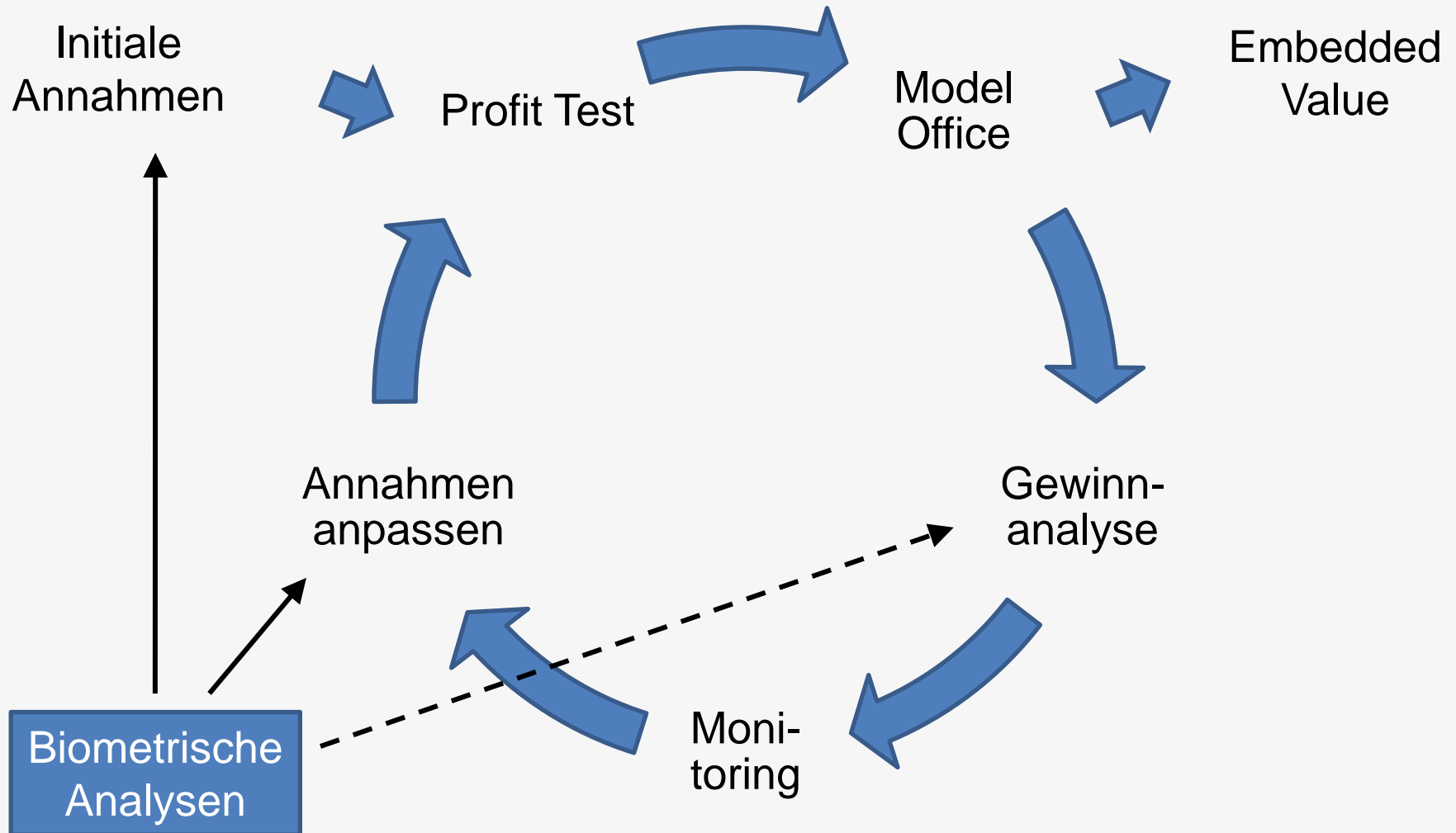


# Biometrische Analysen: Traditioneller Ansatz



# Aktuarieller Kontrollzyklus

## Goford, 1985



# Datenanforderungen

## Biometrische Analysen

Die Datenanforderungen für biometrische Analysen sollten enthalten:

Deskriptive Statistiken des Portfolios, wie etwa

- Änderungsanalyse
- Verteilung der Versicherungssumme und Sum at Risk
- Exposure nach Alter, Geschlecht, Kalenderjahr, Raucherstatus, etc.
- Anzahl der Schäden nach Alter, Geschlecht, Kalenderjahr, Raucherstatus, etc.

Rohe und ausgeglichene Raten oder Wahrscheinlichkeiten für

- Sterblichkeit, Storno
- Invalidisierung, Reaktivierung

# Statistik für Biometrische Analysen

## Sterberaten oder -wahrscheinlichkeiten

Naiver Ansatz SterbeWSK  $q$  zu schätzen

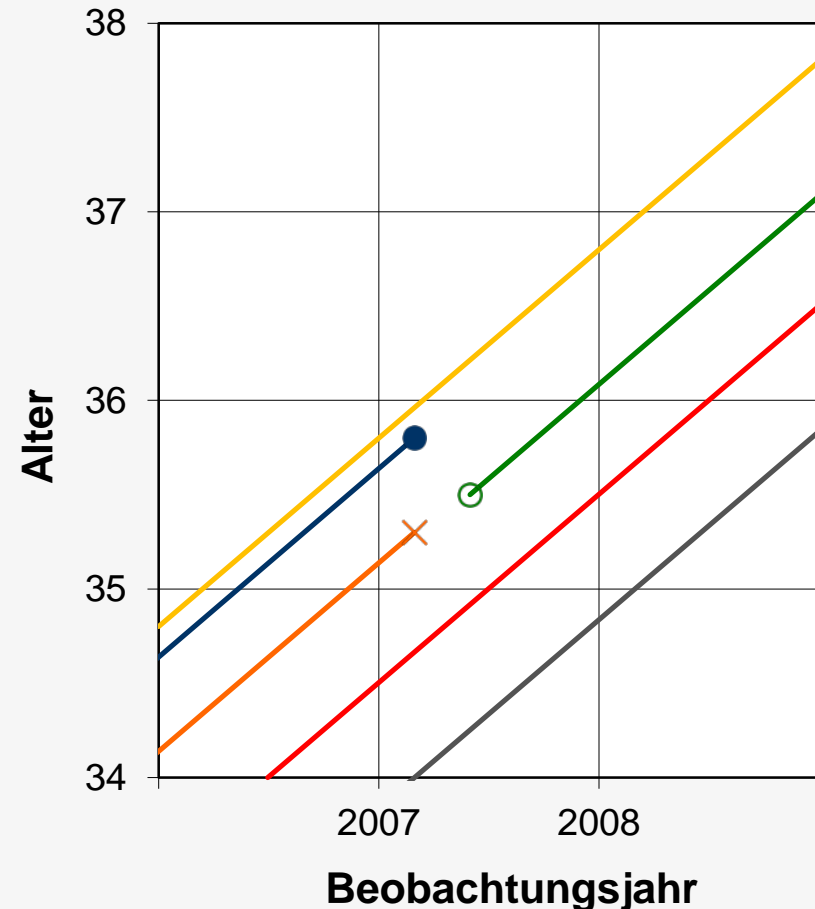
$$q = \frac{\# \text{Tote}}{\# \text{Lebende}}$$

- # Tote: einfach abzählen
- # Lebende: nicht eindeutig bestimmbar

Mögliche Ansätze die Anzahl der Lebenden / das Exposure zu bestimmen

1. Aktuarieller Ansatz (nach Gerber)
2. Initial Exposure
3. Central Exposure

### Lexis Diagramm



Die “force of mortality” oder Sterberate  $\mu_x$

$$\mu_x = -\ln(1 - q_x)$$

ist die bedingte Wahrscheinlichkeit im nachfolgenden infinitesimalen Zeitintervall zu sterben, gegeben, dass die Person bereits das Alter  $x$  erreicht hat.

Andere Interpretation: “Steigung des Sterblichkeitsverlaufs”

Viele Sterbegesetze basieren auf dieser Größe:

- Gompertz (1825):  $\mu_x(t) = B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Makeham (1860):  $\mu_x(t) = A + B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Perks (1932):  $\mu_x(t) = \frac{A + Be^{\beta(x+t)}}{1 + Ce^{\beta(x+t)}}$

# Statistik für Biometrische Analysen

## Central Exposure

Summiere die Längen aller Linien im markierten Rechteck

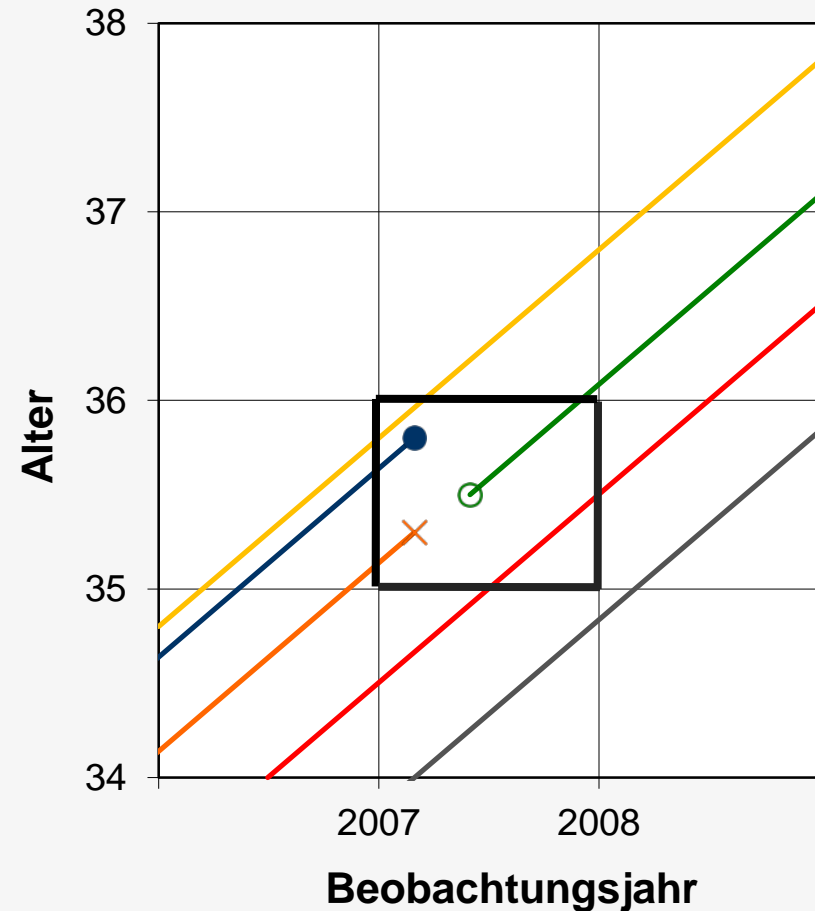
- gelb: 0.2 (danach 36)
- blau: 0.2 (danach Storno)
- orange: 0.2 (danach Tod)
- grün: 0.5 (Neugeschäft)
- rot: 0.5 (davor 34)

Schätze zuerst  $\mu_x$ , dann daraus  $q_x$

$$\mu_{35} = \frac{\#Tote}{\#Exposure} = \frac{1}{1.6} = 0.625$$

$$q_{35} = 1 - \exp(-\mu_{35}) = 0.465$$

### Lexis Diagramm





### Vorteile:

- Zählt Neugeschäft und Storno mit exaktem Exposure
- Gut analysiert und verstanden in akademischer Welt
- Schätzer für Sterbewahrscheinlichkeit ist im Intervall  $[0,1]$
- Schätzer hat angenehme statistische Eigenschaften
- Kann als Basis für Generalisierte Lineare Modelle verwendet werden

### Nachteile:

- Oft nur wenig bekanntes Verfahren

# Biometrische Analysen: Anwendung von Generalisierten Linearen Modellen

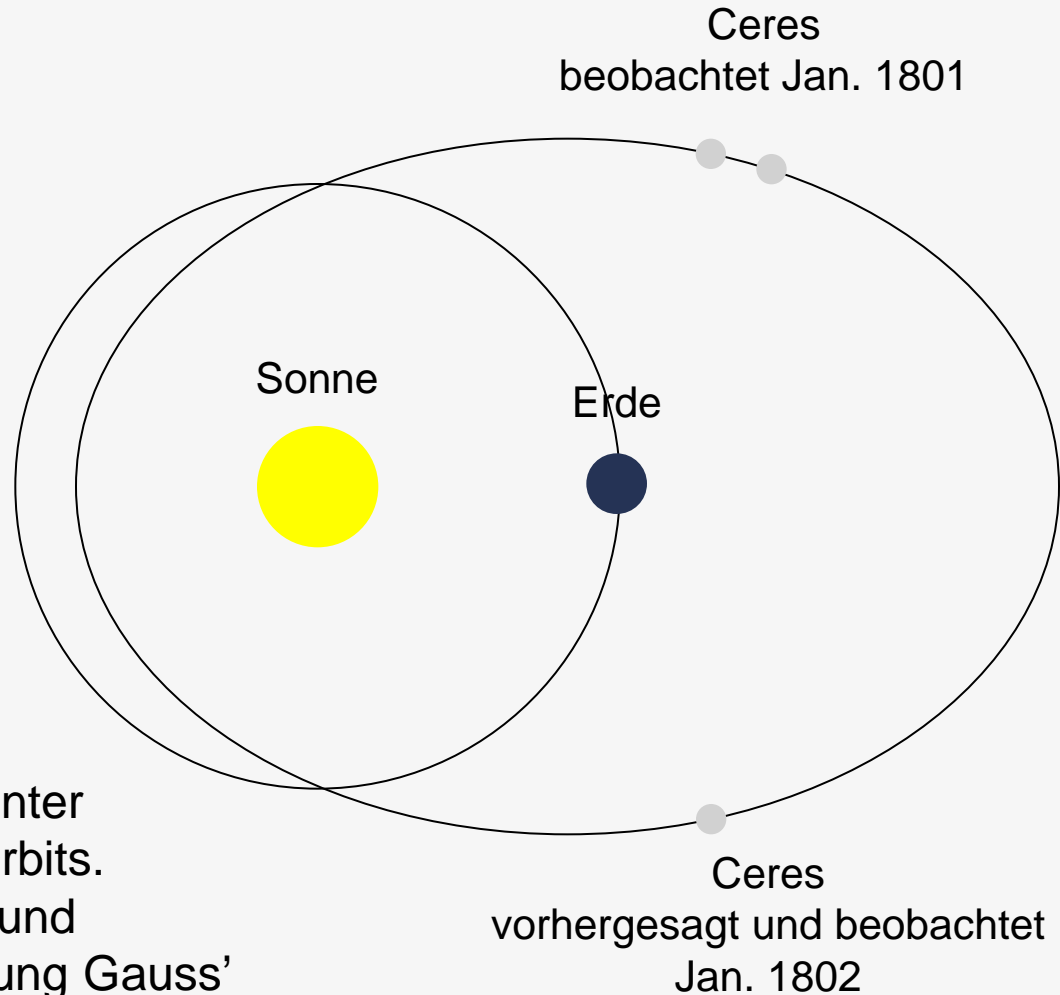


Münchener Rück  
Munich Re Group





C. F. Gauss 1777-1855



Gauss erfand Lineare Modelle unter anderem zur Berechnung von Orbits. GLMs wurden 1972 von Nelder und Wedderburn als Verallgemeinerung Gauss' Ansatz entwickelt.

# Best Estimates für ein Portfolio Risikolebensversicherung mit Raucherstatus

Portfoliodaten einer deutschen Lebensersterversicherung:

Altersintervall:	18 - 65
Exposure:	2 Millionen Policenjahre (NR, m)
	1 Million Policenjahre (NR, f)
	0,3 Millionen Policenjahre (R, m)
	0,1 Millionen Policenjahre (R, f)
Beobachtete Zahl Toter:	Sehr kleine Anzahl für weibliche Raucher



**Traditionelle Methoden können für die Herleitung von  
Best Estimates nicht angewendet werden**

# Best Estimates für ein Portfolio

## Anpassung für Männer

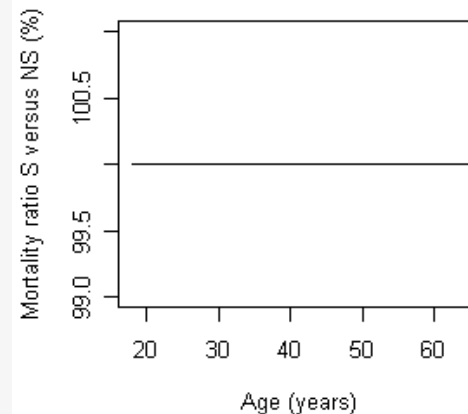
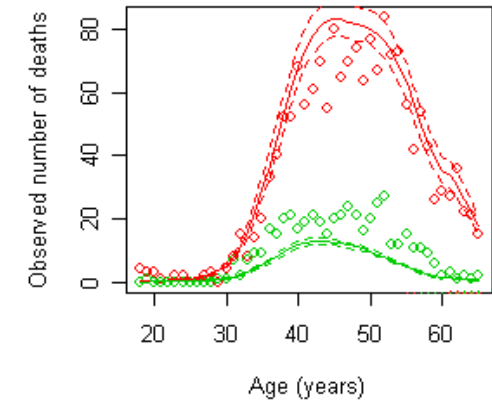
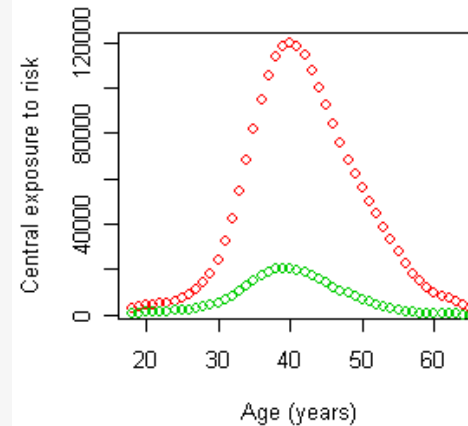
### Problem:

Kleine Anzahl an Toter erlaubt nicht die Verwendung traditioneller Ansätze.

### Erster Schritt:

Anpassung durch GLMs ohne Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus

► Fit nicht zufriedenstellend



# Best Estimates für ein Portfolio

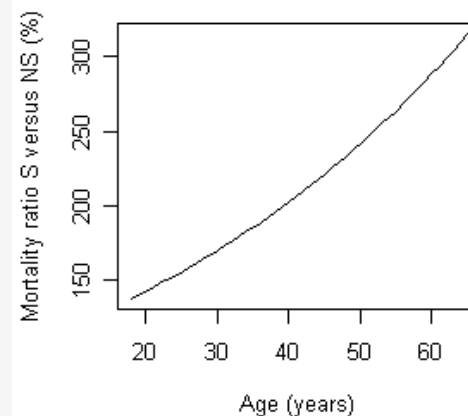
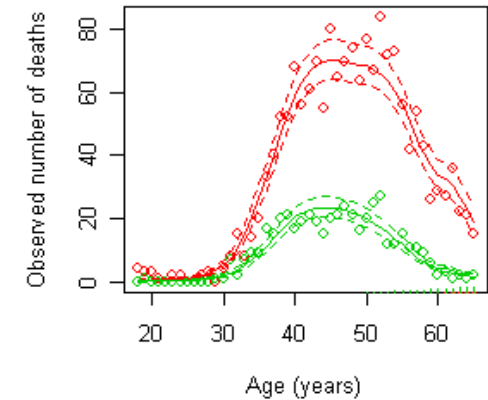
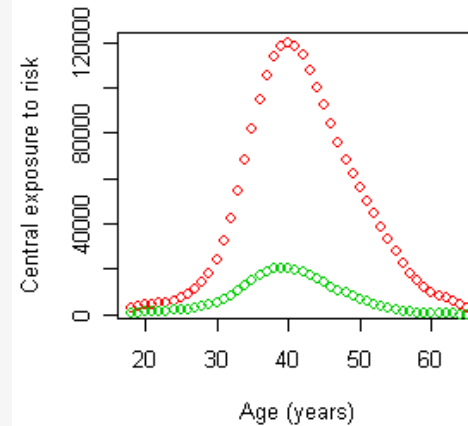
## Anpassung für Männer nach Raucherstatus

### Zweiter Schritt:

Anpassung durch GLMs mit Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus.

Dabei quadratische Abhängigkeit nach Alter angesetzt.

► Fit angemessen



# Best Estimates für ein Portfolio

## Gleichzeitige Anpassung für Männer und Frauen

### Dritter Schritt:

Anpassung mit Abhängigkeit  
zwischen Alter und  
Raucherstatus

und

Verwende gleiche Grundform  
für beide Geschlechter

- ▶ Angemessene Anpassung  
auch für kleine Anzahl  
Toter bei Frauen möglich



GLMs sind durch drei Komponenten bestimmt.

- **zufällige Komponente:**

Response  $Y_i$  unabhängig mit Verteilung aus der exponentiellen Familie mit Erwartungswert  $\mu_i$

- **systematische Komponente:**

linearer Prädiktor:  $\eta_i = x_i^T \beta = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik}$

mit  $x_i = (1, x_{i1}, \dots, x_{ik})^T$

- **Linkfunktion:**  $g(\mu_i) = \eta_i$

verbindet den linearen Prädiktor  $\eta_i$  mit dem Erwartungswert  $\mu_i$



# Generalisierte Lineare Modelle für die Lebensversicherung

Die drei Komponenten der GLMs in der Lebensversicherung.

- **zufällige Komponente:**

Response  $Y_i$  modelliert Anzahl der Toten

„Poisson-Modell“ für Central Exposure Ansatz

- **systematische Komponente:**

linearer Prädiktor:  $\eta_i = x_i^T \beta$

- **Linkfunktion:**  $\log(\mu_i) = \eta_i$

$\mu_i = \text{Exposure}_i \cdot \exp(\eta_i) = \exp(\log(\text{Exposure}_i) + x_i^T \beta)$

mit „Offset“  $\log(\text{Exposure}_i)$

# Best Estimates für ein Portfolio

## Modellierung durch GLM

$$\mu = \text{Exposure} \cdot \exp(\beta_0 f(\text{Alter}) + (\beta_1 + \beta_2 \text{Alter} + \beta_3 \text{Alter}^2) \text{Raucher} + \beta_4 \text{Geschlecht})$$

**mit**

$\mu$	erwartete Anzahl der Toten
$\beta_i$	lineare Faktoren zur Anpassung des GLM
Alter	in Jahren
f	Polynom oder an Portfolio angepasste Funktion (z.B. lokaler Ausgleich, Whittaker-Henderson)
Raucher	0 bei Nichtraucher, 1 bei Raucher
Geschlecht	0 bei Männern, 1 bei Frauen

# Risikomodell mit Generalisierten Linearen Modellen kalibrieren



BRiSMA (**B**iometric **R**isk – **S**tochastic **M**odeling **A**pproach)

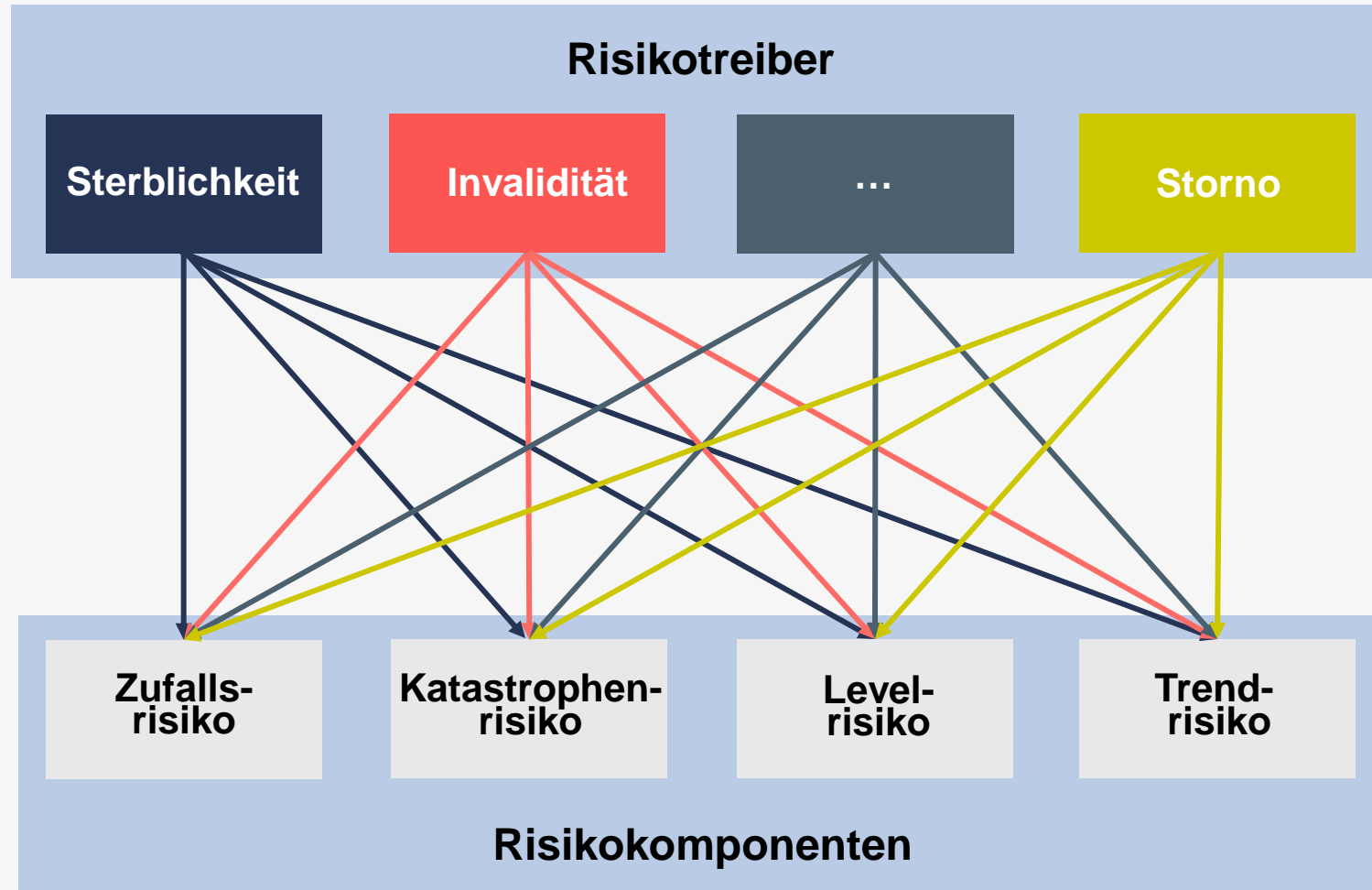
– grundlegende Idee einer stochastischen Modellierung

Für jeden Risikotreiber werden Simulationen durch die folgende Vorschrift generiert:

**Simulierter Wert = Best Estimate Wert · Faktor für Schwankung**

Die Zufallsvariablen der Faktoren für die Schwankung sind auf den Erwartungswert 1 normiert, um die Simulation auf den Best Estimate zu zentrieren.

## Wesentliche Risikotreiber und -komponenten



### Risiko- komponenten

#### Zufalls- risiko

Jährliche, zufällige Fluktuationen  
Kalibriert auf die Schwankung der Gesamtschadenverteilung  
des Portfolios

#### Katastrophen- risiko

Z.B. Pandemien, Naturgefahren  
Kalibriert auf historische Großschäden und Experteneinschätzung

#### Level- risiko

Irrtumsrisiko: Fehleinschätzung des Best Estimate durch schlechte  
Datenqualität, Basisrisiko etc.

Kalibriert mit biometrischen Analysen und Markteinschätzung

#### Trend- risiko

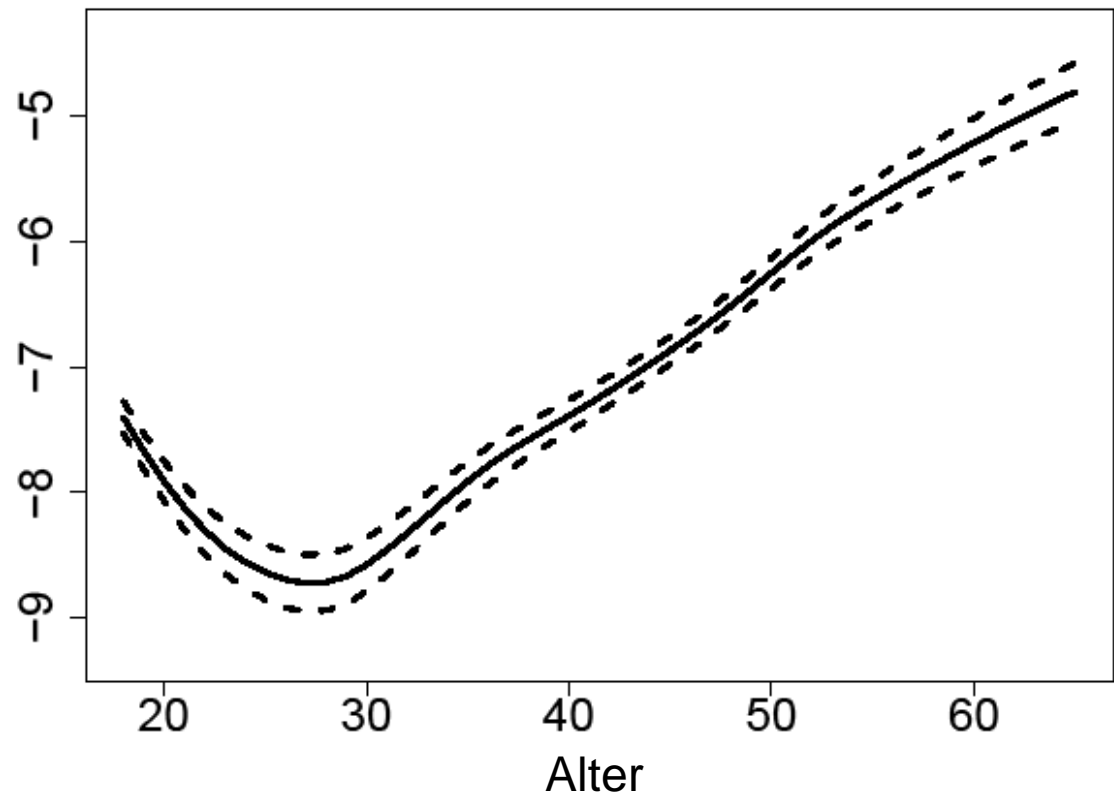
Langzeitentwicklung eines ansonsten korrekt geschätzten Best Estimate  
Kalibriert auf historischen Trendentwicklungen

**Anwendung von GLMs für Kalibrierung von Level- und Trendrisiko**

## Kalibrierung des Levelrisikos

Logarithmus des Best Estimate mit 95% Konfidenzintervall:

1. Bestimme Konfidenzintervall mit GLM
2. Wende Poisson Modell für die Simulation des Levelrisikos an.
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen
4. Modelliere ggf. Basisrisiko entsprechend



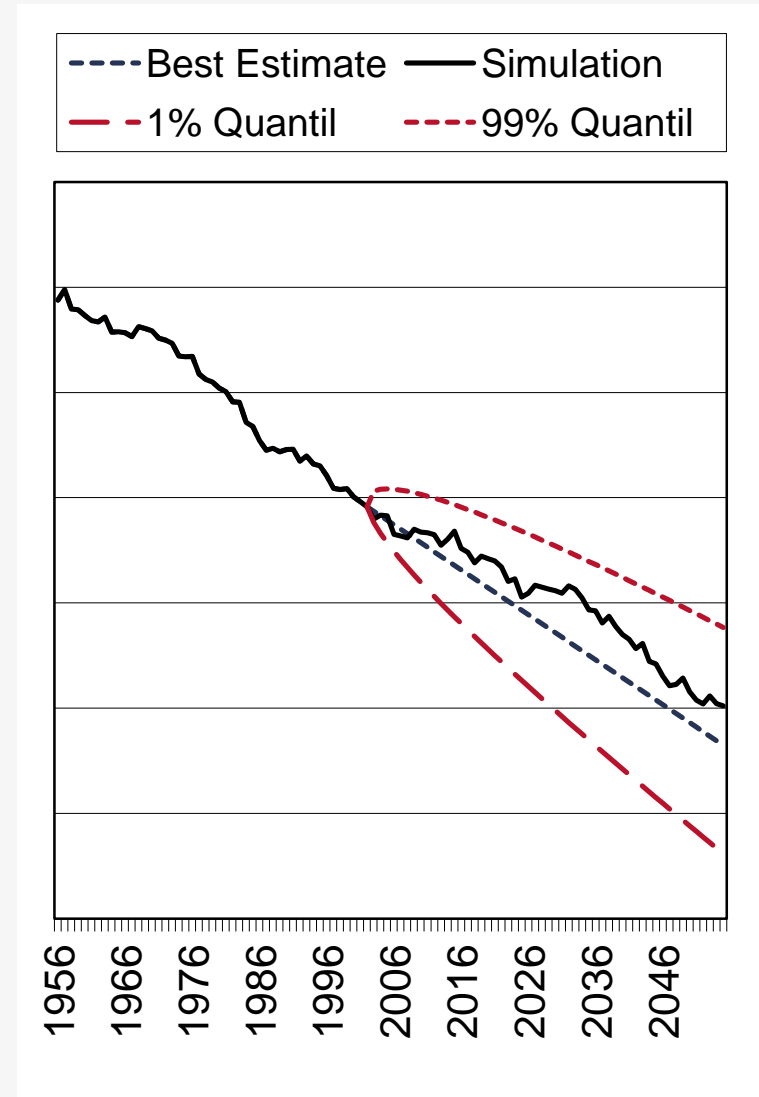
## Kalibrierung des Trendrisikos

Verwende Standardmodelle für die Kalibrierung des Trends (häufig GLMs):

- Lee-Carter oder Haberman-Renshaw
- Cairns Blake Dowd

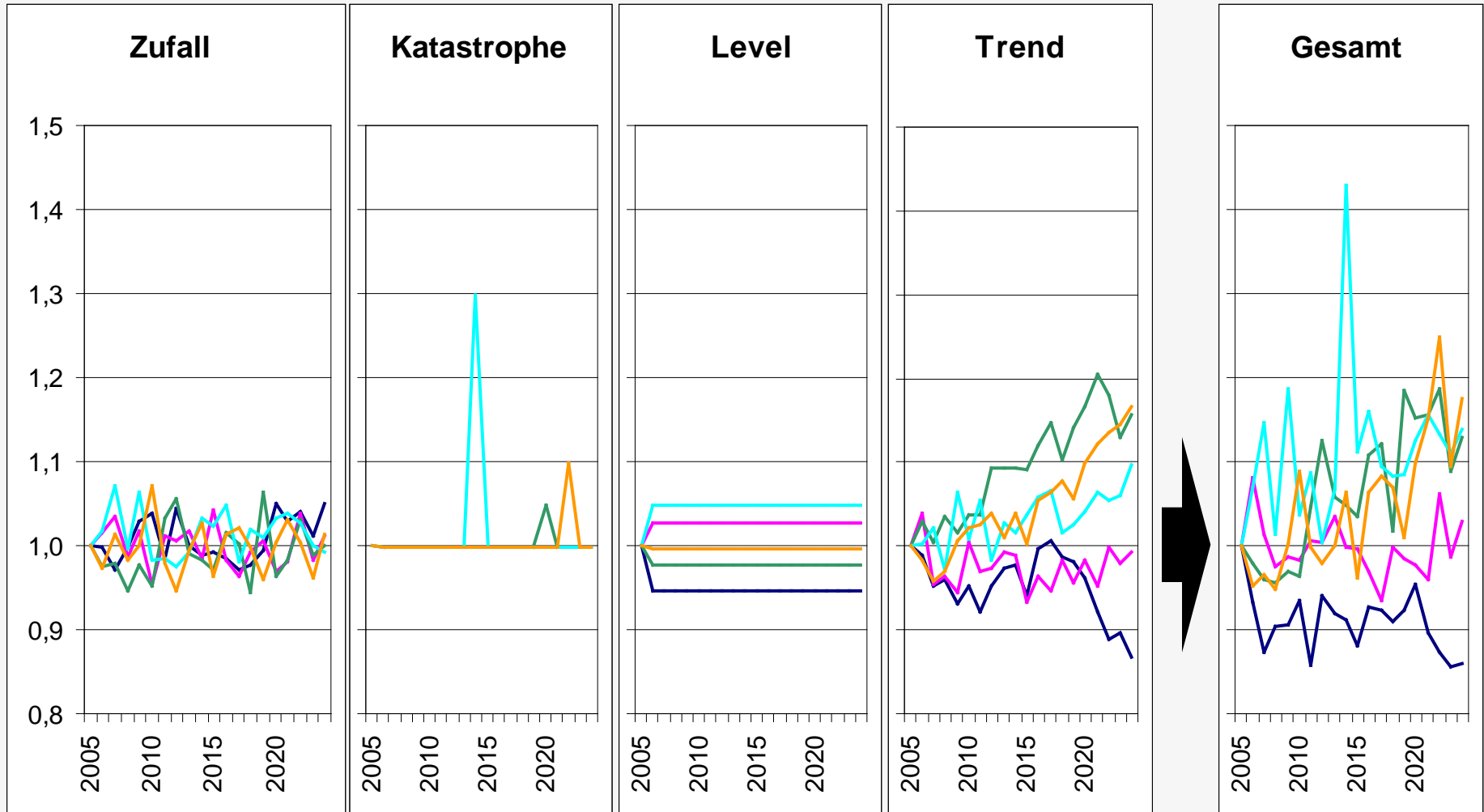
oder vergleichbare Ansätze...

1. Kalibriere das Modell
2. Erzeuge Pfade zukünftiger Trendentwicklung durch Zeitreihen
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen





## Risikokomponenten eines Risikotreibers



$$\text{Zufall} \cdot \text{Katastrophe} \cdot \text{Level} \cdot \text{Trend} = \text{Gesamt}$$

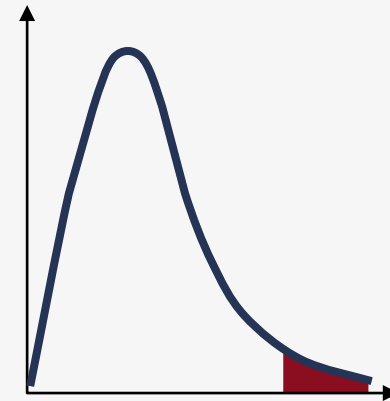
# Risikomanagement



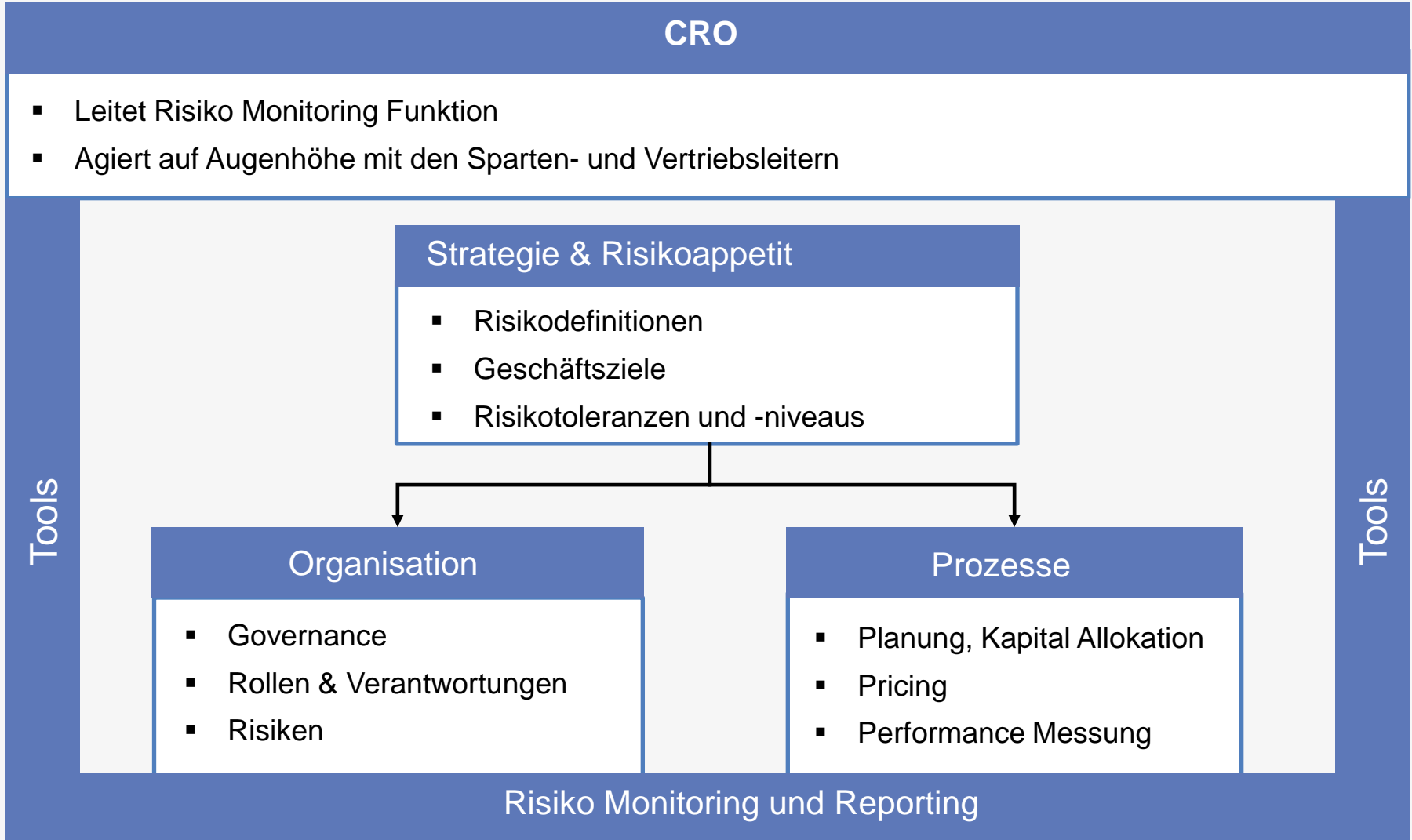
# Was Risikomanagement NICHT ist

Risiko-  
management

≠



**Risikomanagement bedeutet nicht nur das perfekte Modell zu finden**



# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Dr. Frank Schiller



Münchener Rück  
Munich Re Group



Byrne, F., Farr, I. (2007), *Risk Management in Strategic Decision Making*,  
Emphasis Magazine 2007 No. 3

CFO Forum (2008), *Market Consistent Embedded Value Principles*.  
[http://www.cfoforum.nl/pdf/mcev\\_principles\\_and\\_guidance.pdf](http://www.cfoforum.nl/pdf/mcev_principles_and_guidance.pdf)

Forfar, D. et al (1988), *On Graduation by Mathematical Formula*. Journal of  
Institute of Actuaries Students' Society, 115, 1-119.

Gerber, H. (1997), *Life Insurance mathematics*. Springer, 3<sup>rd</sup> edition

Goford, J. (1985), *The Control Cycle: Financial Control of a Life Assurance  
Company*. Journal of Institute of Actuaries Students' Society, 28, 94-114.

Haberman, S., Renshaw A. (1996), *Generalized Linear Models and Actuarial  
Science*. The Statistician, 45 No. 4, 407-437