# Ansätze zur stochastischen Modellierung der Sterblichkeit

**Dr. Frank Schiller**

DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

*LEBENS-Gruppe Herbsttagung, 21. November 2006, München*

1965 unterschrieb Frau Jeanne Calment (damals 90) einen Vertrag mit Herrn Raffray (damals 47) über den Verkauf ihres Appartements:

- Frau Calment erhielt lebenslanges Wohnrecht
- Herr Raffray musste lebenslang an Frau Calment eine Rente zahlen

Der Wert des Appartements inklusive Mietzahlungen entsprach etwa 10 Jahresrenten.

Herr Raffray starb 1995, Frau Calment überlebt ihn um 2 Jahre.

Jeanne Calment (1875 – 1997)

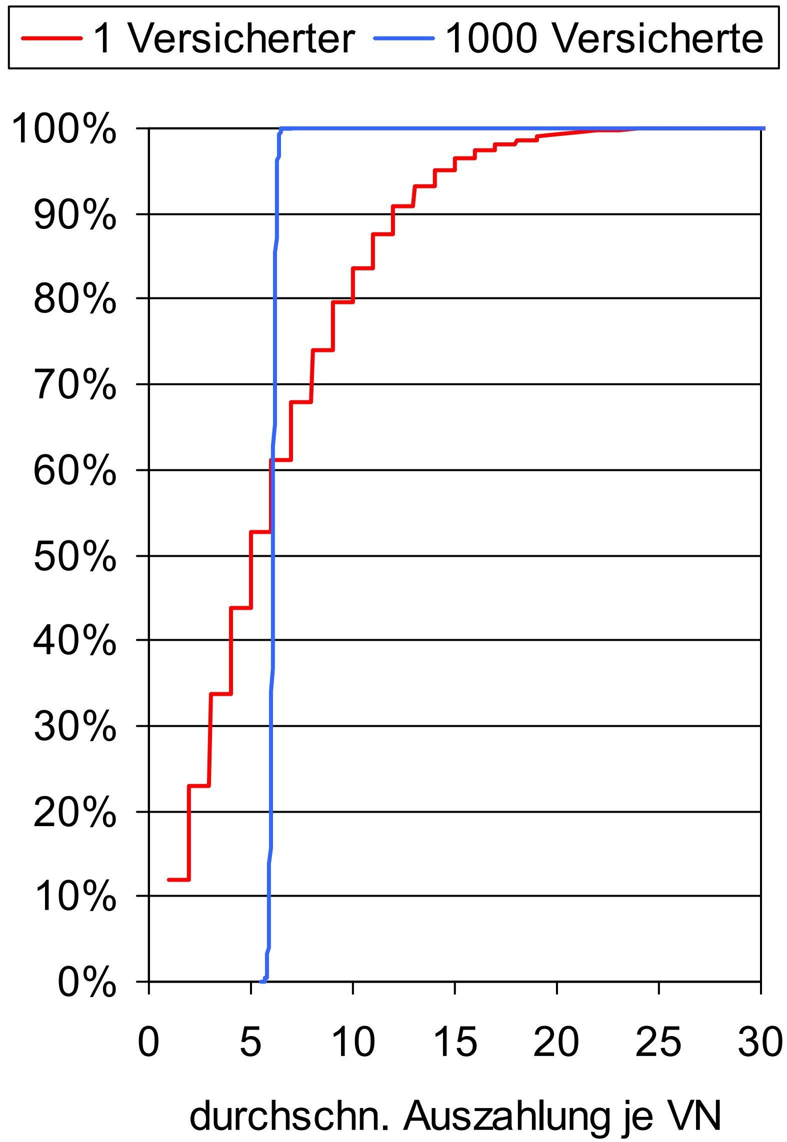


**Mit welcher Lebenserwartung hätte Herr Raffray rechnen müssen?**

Simulation mit DAV 2004 R
2. Ordnung als Best Estimate

**Zufallsschwankungen** haben großen Einfluss auf kleine Portfolien:

| Quantil | Auszahlung 1 VN | Auszahlung 1000 VN |
|---|---|---|
| 50% | 5 | 6,08 |
| 75% | 9 | 6,17 |
| 95% | 14 | 6,31 |
| 99% | 19 | 6,40 |




Zufallsschwankungen lassen sich diversifizieren, Abweichungen von der Best Estimate Tafel und der Best Estimate Trendentwicklung nicht!

Lee und Carter (1992) entwickelten einen einfachen Ansatz zur Abschätzung zukünftiger Trendentwicklungen.

**1. Schritt (Anpassung des Modells an die Historie):**

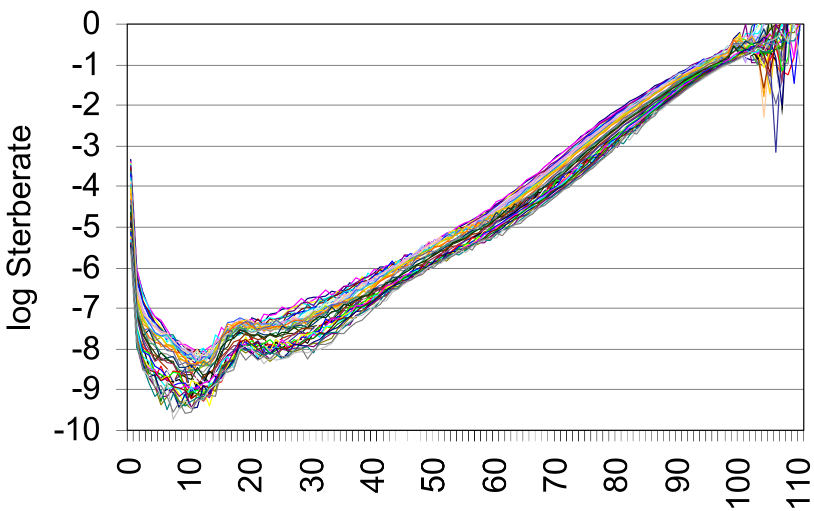
Die jährliche Entwicklung der logarithmierten Sterberaten r aller Alter lässt sich in vier Komponenten zerlegen (log-bilineares Modell)

1. Je Alter x der Durchschnitt $m_x$ über den gesamten Beobachtungszeitraum
2. Je Alter x die durchschnittliche Änderung $\beta_x$ über den gesamten Beobachtungszeitraum
3. Je Zeitpunkt t der Einfluss $\kappa_t$ des Vektors $\beta$ auf den Durchschnitt m
4. Residuum der Anpassung $\varepsilon_{x,t}$

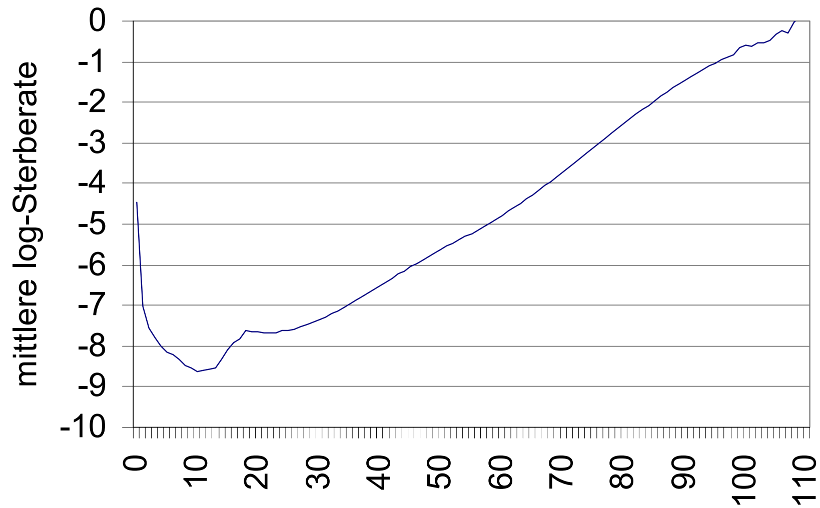
$$\ln r_{x,t} = m_x + \kappa_t \cdot \beta_x + \varepsilon_{x,t}$$

Anpassung des Modells durch Singularwertzerlegung (SVD)

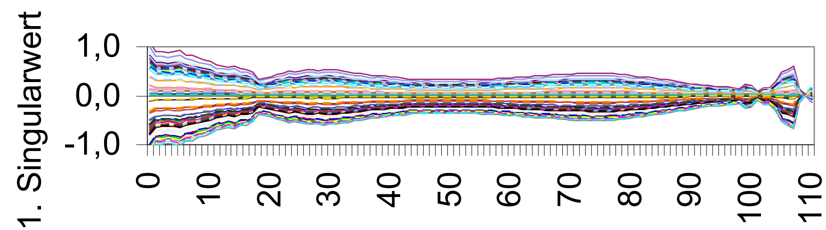
# 1. Lee-Carter Modell für Sterblichkeit



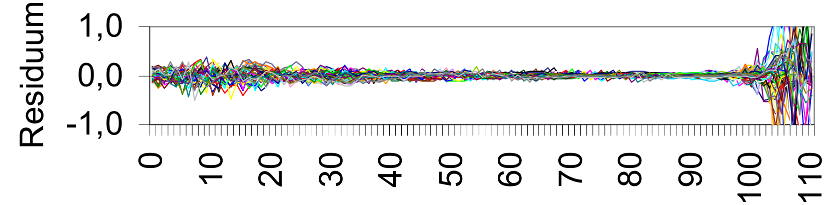

=




+




+




$$\ln r_{x,t} = m_x + \kappa_t \cdot \beta_x + \varepsilon_{x,t}$$

Lee-Carter Ansatz auf Sterberaten der Frauen in Deutschland von 1956 bis 2002 angewendet

Datenquelle: www.mortality.org

## 2. Schritt (Projektion in die Zukunft):

Unter den Annahmen

- die durchschnittliche Änderung $\beta_x$ ist auch in Zukunft zeitinvariant
- der Einflussfaktor $\kappa_t$ zum Zeitpunkt t genügt einer Zeitreihe (ARIMA)
- die Residuen $\varepsilon_{x,t}$ sind unabhängig, identisch normalverteilt

können die Sterberaten über den Zeithorizont T hinaus projiziert werden.

Standard Ansatz: $\kappa_t$ ist Irrfahrt, d.h. ARIMA(0,1,0)-Prozess

$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \hat{\theta} + \xi_t$ für t ≥ T und mit

- konstanter Drift $\hat{\theta} = \frac{\kappa_T - \kappa_1}{T}$
- unabhängigen, identisch normalverteilten Zuwächsen $\xi_t$ mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung

$$\hat{\sigma}^2_{RW} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\kappa_{t+1} - \kappa_t - \hat{\theta})^2$$

# 1. Lee-Carter Modell für Sterblichkeit



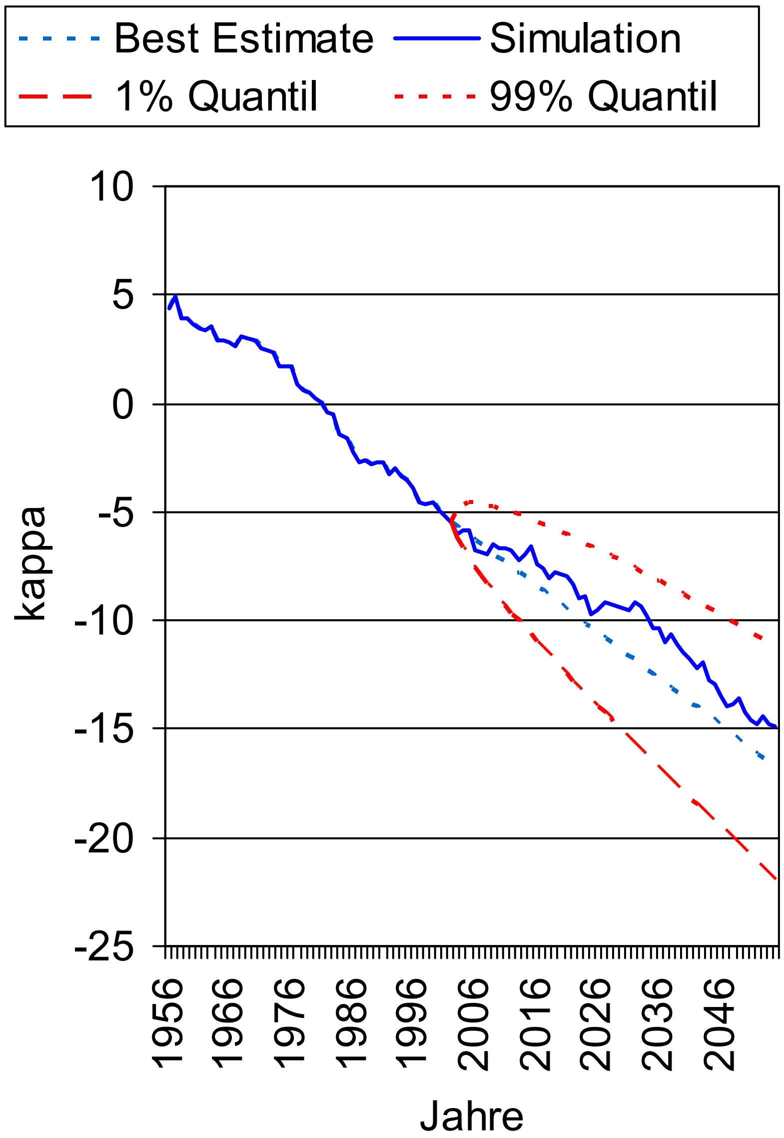
Auf Sterberaten der Frauen in Deutschland von 1956 bis 2002 angewendet ergibt sich:

– Drift in Zeitreihe = −0,214

– Standardabweichung der Irrfahrt = 0,317

Der Drift der Zeitreihe entspricht eine altersabhängige, jährliche Best Estimate Trendverbesserung

| Alter | Best Estimate Trend |
|---|---|
| 30 | −2,3% |
| 50 | −1,4% |
| 70 | −1,9% |
| 90 | −1,1% |

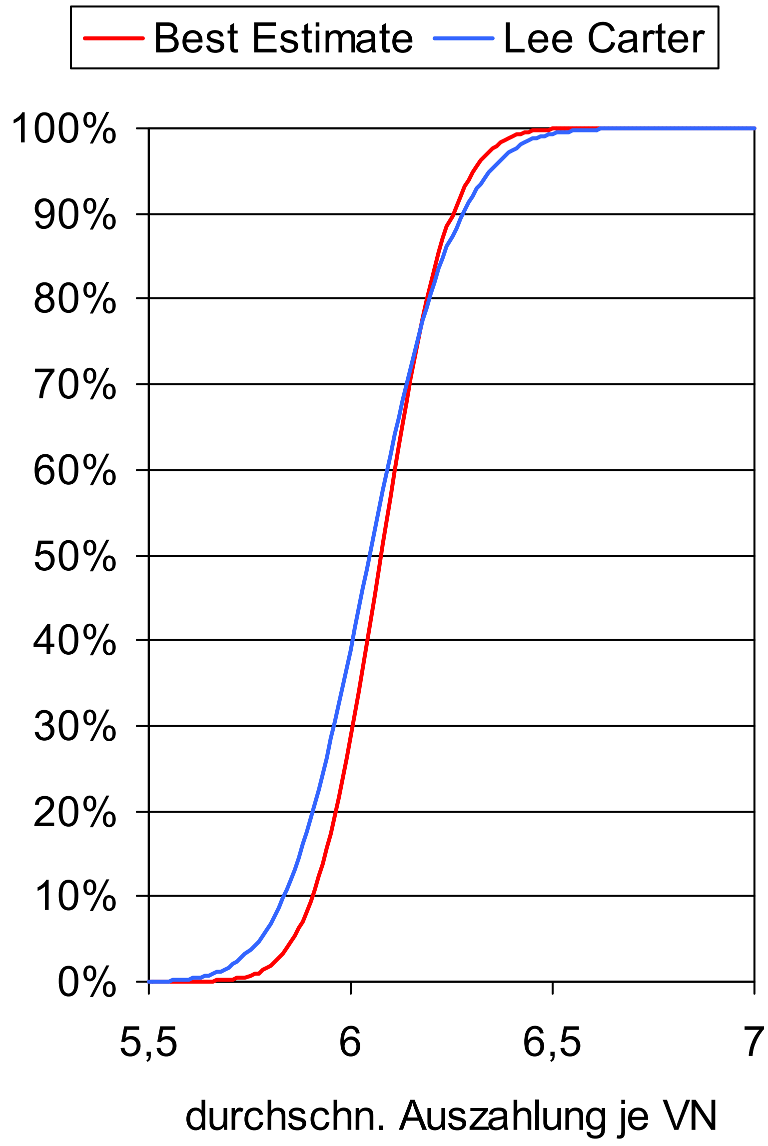



Datenquelle: www.mortality.org

Simulation mit DAV 2004 R
2. Ordnung als Best Estimate und daran adaptiertem Lee Carter Modell bei einer Portfoliogröße von 1000:

| Quantil | Auszahlung Best Estimate | Auszahlung Lee Carter |
|---|---|---|
| 50% | 6,08 | 6,05 |
| 75% | 6,17 | 6,17 |
| 95% | 6,31 | 6,35 |
| 99% | 6,40 | 6,47 |

- Streuung unwesentlich breiter
- Median durch exponentielle Irrfahrt verschoben
- Mittelwert bei beiden Ansätzen etwa 6,1



**Vorteile der Modellierung nach Lee Carter:**

- Leicht zu implementierendes Modell
- Lässt sich gut an bestehende Best Estimate Tafel adaptieren

**Nachteile (Teil 1):**

- Schätzung erfolgt zweistufig, damit
  - Fehlerfortpflanzung der Schätzfehler aus Schritt 1
  - Schätzer haben Bias

  *Lösung*: Poisson log-bilineares Modell mit MCMC Schätzern
- Erster Singularwert oft noch keine gute Näherung

  *Lösung*: Zweiten oder dritten Singularwert mit verwenden

**Nachteile (Teil 2):**

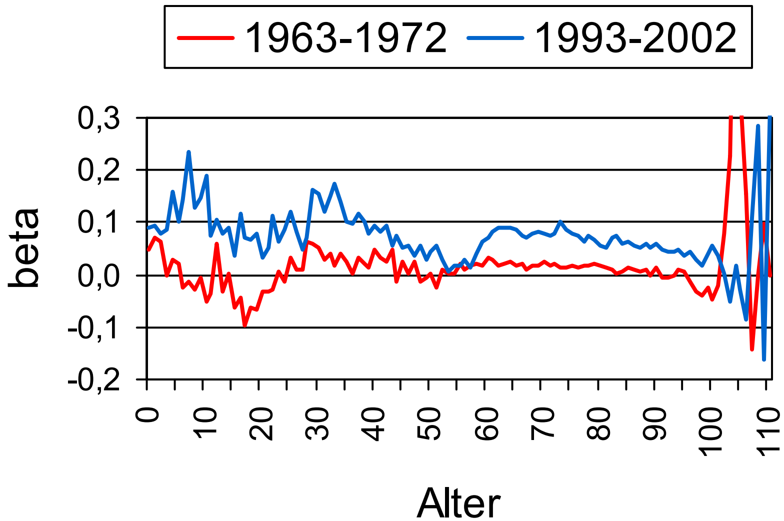
*Problem 1:*

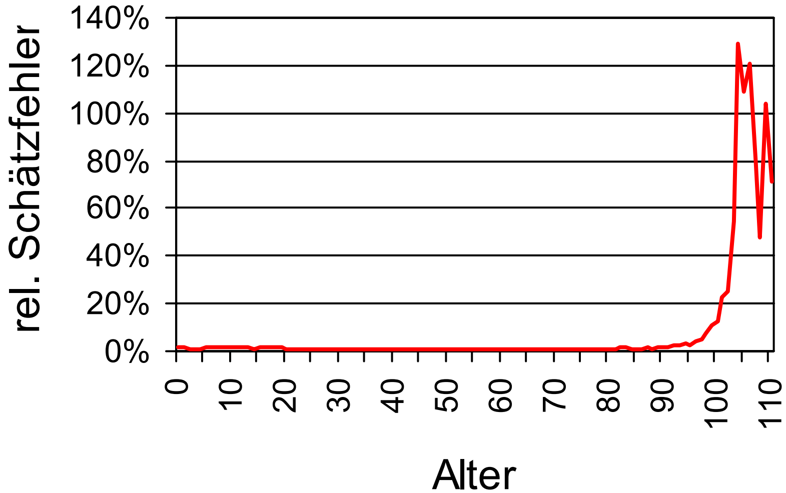
Mittlere Trendänderung je Alter $\beta_x$ ist nicht wie angenommen über den gesamten Beobachtungszeitraum fix.

- Ende der 60er Jahre Ausbildung des Unfallbuckels bei Frauen
- Aktuell kaum Sterblichkeitsverbesserungen von 50- bis 60-jährigen (Todesursache Brustkrebs)

*Problem 2:*

Sehr schlechte Datenqualität für hohe Alter führt zu schlechter Modellierung.



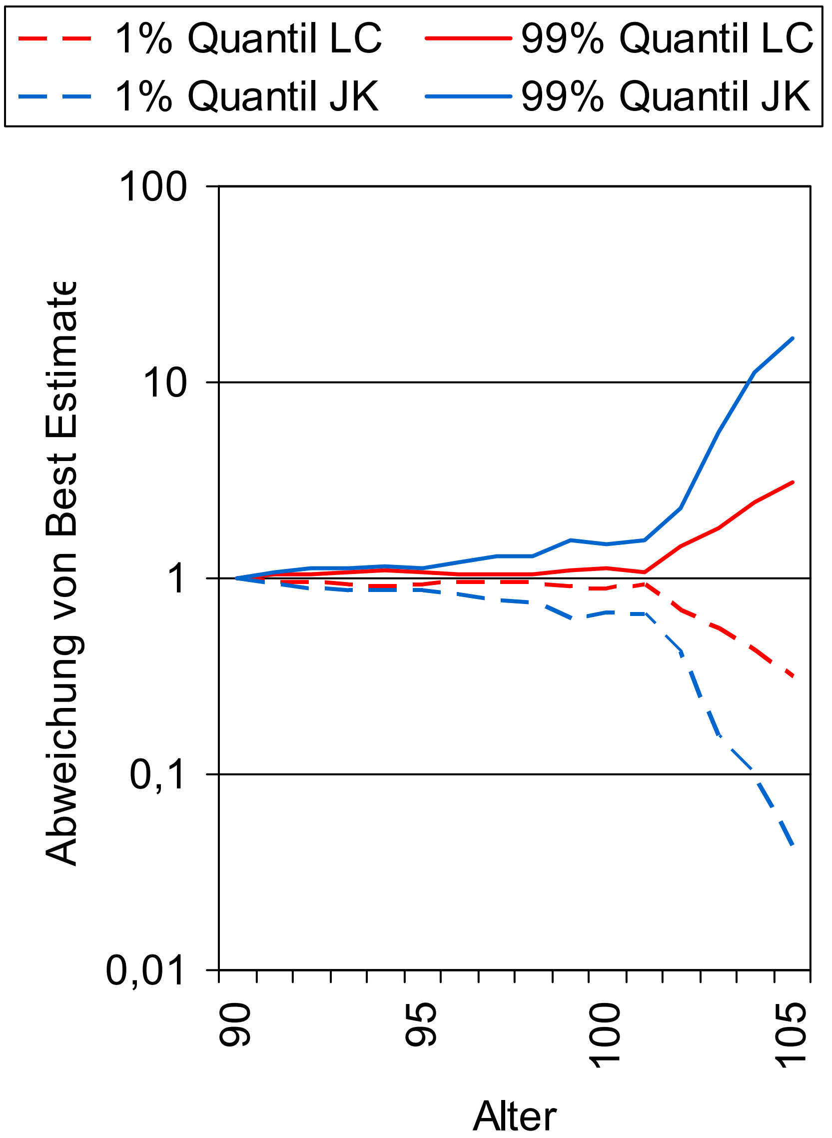

Datenquelle: www.mortality.org

*Idee:*

Schätze mit Bootstrap-Methoden Verteilung für Projektionsparameter $\theta$ und $\sigma$ und variiere diese zum Start der Simulation.

- Schätzfehler werden angemessen berücksichtigt
- Modellfehler ($\beta_x$ zeitlich invariant) werden pauschal berücksichtigt

Für die folgende Modellierung wurde der Parameterfehler mit einem Jack-Knife Ansatz auf rollierende 10-Jahresfenster approximiert.

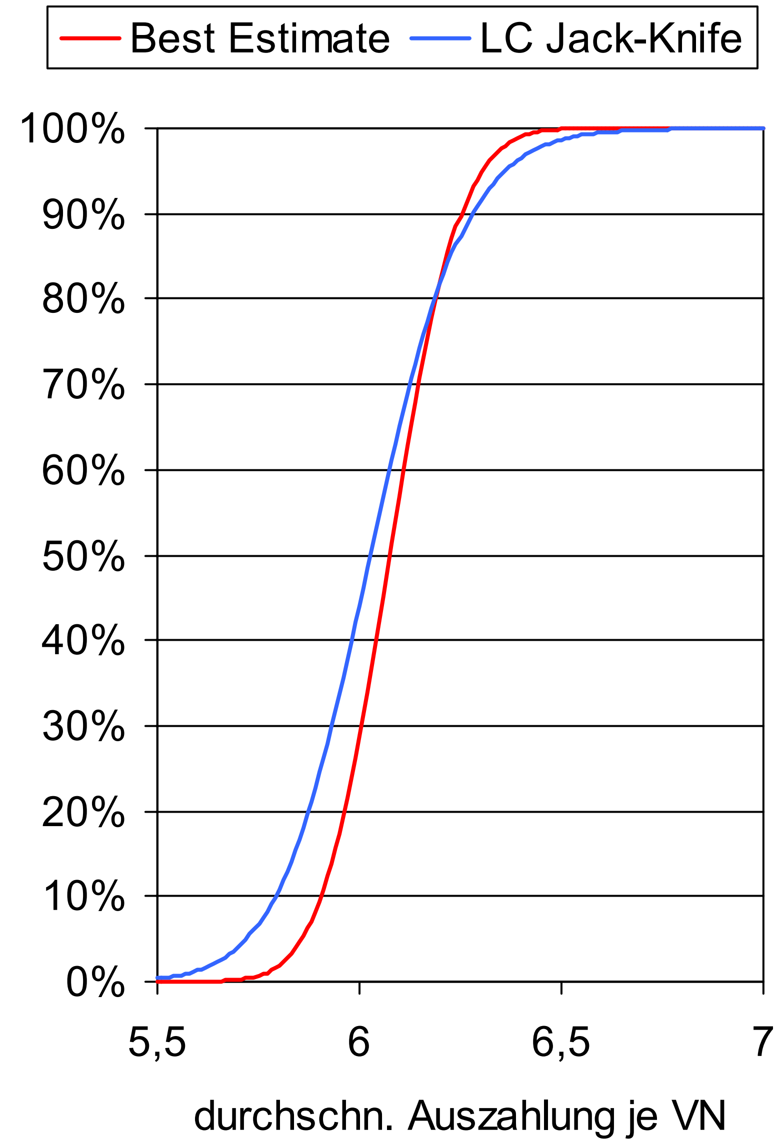



Datenquelle: www.mortality.org

Modellierung nach Lee Carter mit Parameterunsicherheit adaptiert an DAV 2004 R:

| Quantil | Auszahlung Best Estimate | Auszahlung Lee Carter Jack-Knife |
|---|---|---|
| 50% | 6,08 | 6,03 |
| 75% | 6,17 | 6,16 |
| 95% | 6,31 | 6,36 |
| 99% | 6,40 | 6,53 |

– Streuung breiter als bei LC Modell
– Median weiter verschoben
– Mittelwert bei LC Modell jetzt 6,0 statt 6,1



Milevsky, Promislow (2001), Dahl (2004), Blake, Cairns, Dowd (2005) und Korn, Natcheva, Zipperer (2006) schlugen Modelle vor, bei denen

- Sterberaten durch ein geeignetes Sterbegesetz angepasst werden
- Die Parameter des Sterbegesetzes durch Diffusionsprozesse zeitlich variieren

**Geeignete Sterbegesetze (Teil 1):**

Bezeichungen:

${}_m p_x(t)$ m-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen im Jahr t

$\mu_x(t)$ Mortalitätsrate eines x-jährigen im Jahr t

$${}_m p_x(t) = \exp\left\{-\int_0^m \mu_{x+s}(t+s)\,ds\right\}$$

**Geeignete Sterbegesetze (Teil 2):**

Hier speziell Modelle für hohes Alter

– Makeham-Gompertz

$$\mu_x(0) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$$

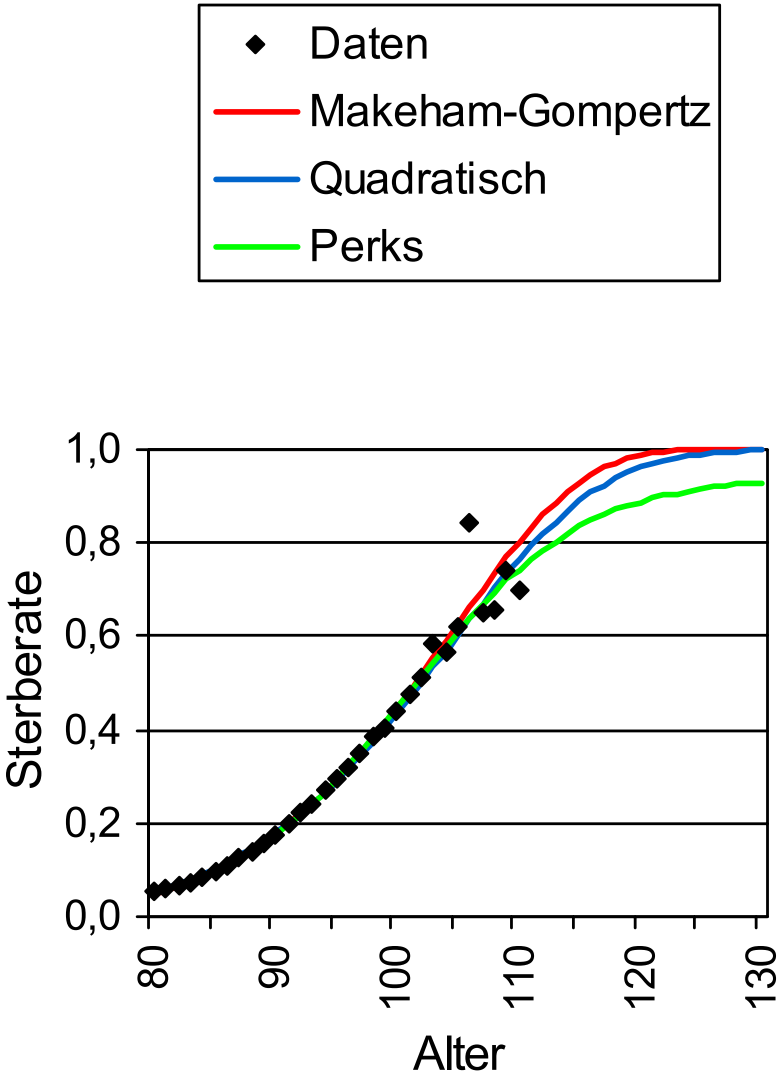
– Quadratisch

$$\mu_x(0) = \alpha e^{\beta x + \gamma x^2} + \delta$$

– Perks

für $\gamma$ = 0 auch „Logistisch“

$$\mu_x(0) = \frac{\alpha e^{\beta x} + \gamma}{\delta e^{\beta x} + 1}$$




**Perks Modell passt Daten für hohe Alter am besten an**

Datenquelle: www.mortality.org

**Wahl des Diffusionsprozesses:**

Jeder Parameter des Sterbegesetzes muss durch den Diffusionsprozess modelliert werden

- Modelle nach Datenanalyse entsprechend vereinfachen
- Vier oder mehr Parameter sind schwer zu handhaben

Da die Definition der Mortalitätsrate $\mu_x$ der der Shortrate ähnelt, könnte man versucht sein Zinsmodelle anwenden (etwa Vasicek, CIR). Aber

- Mean-Reverting in Zinsmodellen führt für Sterblichkeit zu falschen Ergebnissen

Es bieten sich etwa folgende Klassen von Diffusionsprozessen an

- Für reellwertige Parameter: multivariater Ornstein-Uhlenbeck Prozess
- Für positive Parameter: multivariate Feller-Diffusion oder exponentieller Ornstein-Uhlenbeck Prozess

**Beispiel nach Cairns, Blake, Dowd (2005):**

Sterbegesetz: Vereinfachtes, diskretisiertes Perks Modell

$$ {}_1p_x(t) = \frac{1}{e^{A_1(t+1)+A_2(t+1)\cdot(x+t)}+1} $$

Modellierung der Zeitabhängigkeit der Parameter $A(t) = (A_1(t), A_2(t))'$ durch diskretisierte, korrelierte zweidimensionale Brownsche Bewegung mit Drift

$A(t+1) = A(t) + \theta + C \cdot B(t)$

| | |
|---|---|
| $\theta$ | zeitinvariante Drift |
| $C$ | zeitinvariante Korrelationsmatrix |
| $B(t)$ | zweidimensionale Standard Brownsche Bewegung |

Kalibrierung und Prognose wie bei Lee-Carter zweistufig:

1. Sterbegesetz an Daten anpassen

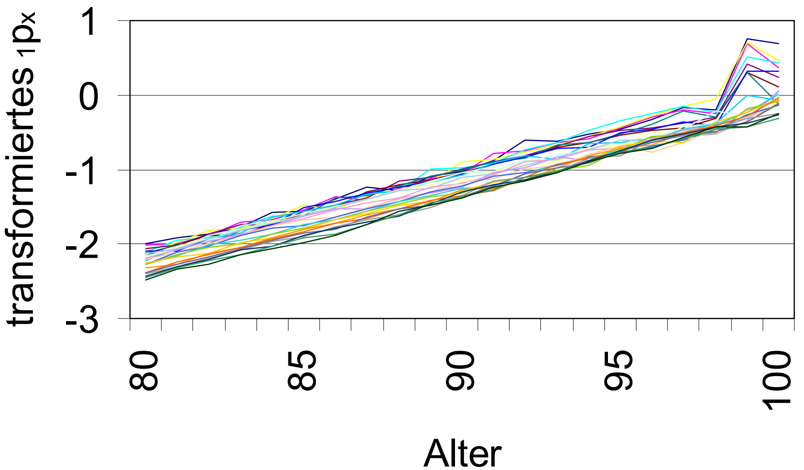
2. An Zeitreihe der Parameter Modell anpassen und damit Prognose ableiten

**1. Schritt (Sterbegesetz an Historie anpassen):**

Innerhalb einer Generation t ist die von Cairns, Blake, Dowd vorgeschlagene Transformierte von ${}_1p_x(t)$

$$\ln(1/{}_1p_x(t) - 1)$$

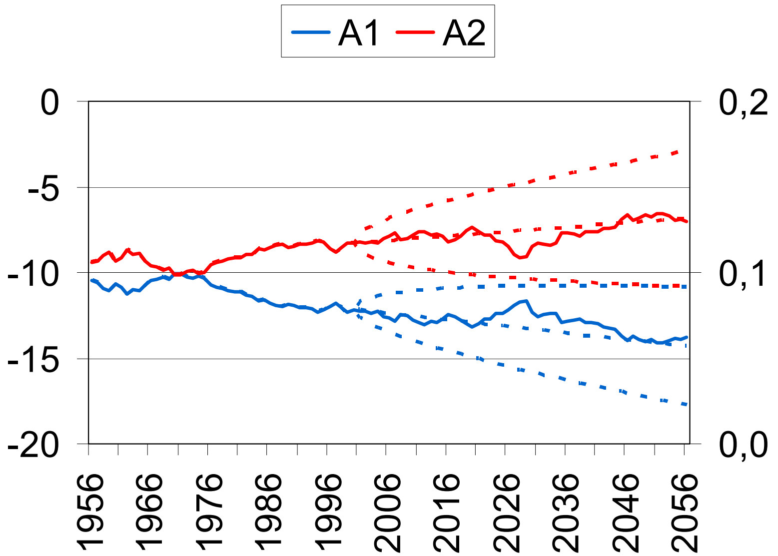
annähernd linear.




**2. Schritt (Diffusion an Parameter $A_1$ und $A_2$ anpassen):**

Mit Least-Square- oder Maximum-Likelihood-Methode ergibt sich

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -0{,}038 \\ 0{,}0026 \end{pmatrix} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0{,}1986 & -0{,}0022 \\ -0{,}0022 & 0{,}00048 \end{pmatrix}$$



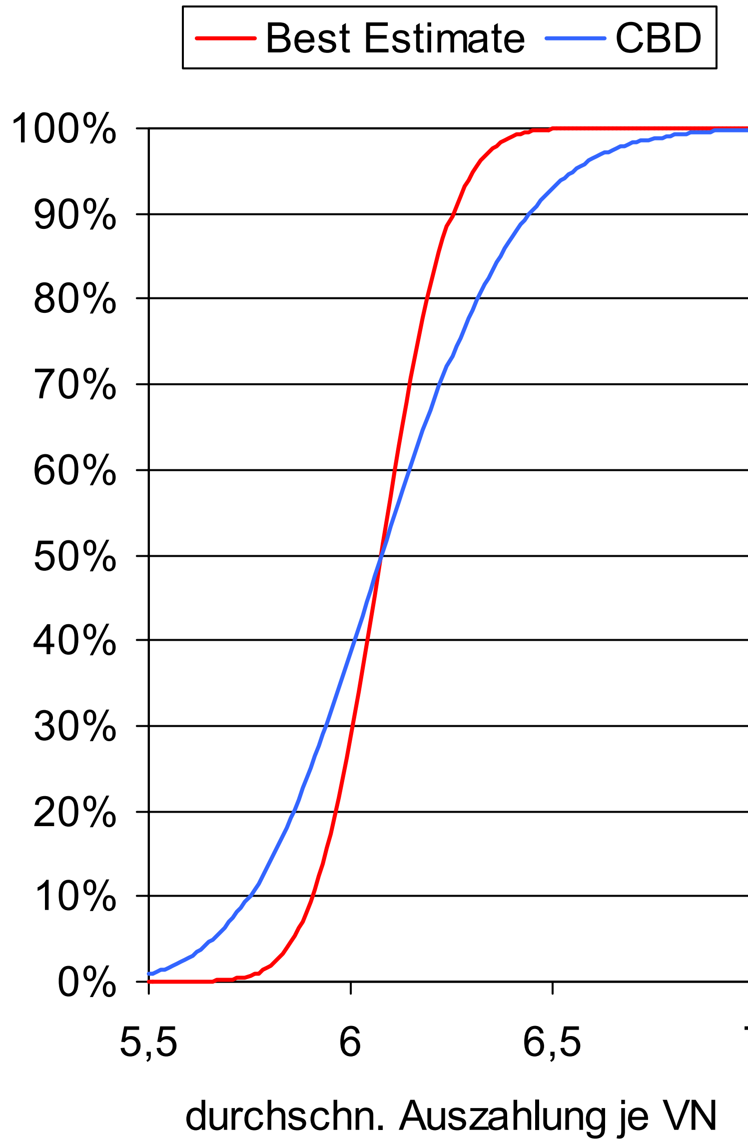
Modellierung nach Cairns, Blake, Dowd auf DAV 2004 R bei einer Portfoliogröße von 1000:

| Quantil | Auszahlung Best Estimate | Auszahlung CBD |
|---|---|---|
| 50% | 6,08 | 6,08 |
| 75% | 6,17 | 6,27 |
| 95% | 6,31 | 6,56 |
| 99% | 6,40 | 6,78 |

– Streuung deutlich breiter als bei Lee Carter Modell

– Median nicht verschoben

– Mittelwert bei beiden Ansätzen etwa 6,1



**Vorteile der Modellierung:**

- Stabil in allen Altersbereichen, in denen Sterbegesetz die Daten gut approximiert
- Hohe Flexibilität durch unterschiedliche Sterbegesetze und Diffusionsprozesse
- Leicht erweiterbar, so dass auch Kohorteneffekte modelliert werden

**Nachteile:**

- Schätzung erfolgt wie bei Lee Carter zweistufig, dadurch Bias
- Nur bedingt anwendbar bei jungen Altern, da dort Sterbegesetze häufig nur eine schlechte Approximation liefern

## Vergleich



| Anwendung | Lee Carter | Sterbegesetz mit Diffusionsprozess |
|---|---|---|
| Risiko- und Kapitalleben | Geeignet solange keine Kohorten- oder altersabhängigen Effekte vorliegen | Nur bedingt geeignet, da für jüngere Alter Sterberaten schlecht durch Sterbegesetz zu approximieren sind |
| Renten | Meist ungeeignet, da nur schlechte Anpassung bei wenig Daten | Gut geeignet |
| Kohorteneffekt | Nach Modellerweiterung bedingt geeignet | Je nach Modellierung angemessen abbildbar |
| Altersabhängige Effekte | Ungeeignet | Nur geeignet, wenn Effekte durch Sterbegesetz gut approximiert werden |

## Literatur



Brouhns N., Denuit M., Vermunt J. K. (2000), A Poisson log-bilinear approach to the construction of projected lifetables, *Insurance: Mathematics & Economics*, **31** (3): 373-393

Cairns A. J.G., Blake D., Dowd K. (2005), Pricing Death: Framework for the valuation and securitization of mortality risk, *AFIR Colloquium 2004*

CMI Mortality sub-committee (2005), *Projecting future mortality: Towards a proposal for a stochastic methodology*, WP 15

DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit (2005), Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen, *DGVFM*, **27** (2): 199-313

Girosi F., King G. (2006), *Demographic Forecasting*, Book manuscript, http://gking.harvard.edu/files/smooth.pdf

Korn R., Natcheva K., Zipperer J. (2006), Langlebigkeitsbonds – Bewertung, Modellierung und Aspekte für deutsche Daten, *DGVFM*, **27** (3): 397-418

Lee R. D., Carter L. R. (1992), Modelling and forecasting U.S. mortality, *Journal of the American Statistical Association*, **87** (14): 659-675

Thatcher A.R., Kannisto V., Vaupel J. W. (1998), *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*, Odense University Press

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Dr. Frank Schiller